Vorlesung Topologie

(Sommersemester 2008)

Dirk Kussin

Institut für Mathematik, Universität Paderborn, Germany
E-mail address: dirk@math.upb.de

Hinweis. Für Druckfehler wird keine Haftung übernommen.

Inhaltsverzeichnis

KAPITEL 1

Mengentheoretische Topologie

1. Metrische Räume

In der Analysis betrachtet man Mengen, auf denen man Begriffe wie *Umgebungen* und *Konvergenz* und für die Abbildungen zwischen diesen Mengen *Stetigkeit* definiert werden kann. Das allgemeine Modell dafür sind die topologischen Räume.

Bevor wir allgemein topologische Räume definieren, behandeln wir eine große und wichtige Klasse von Beispielen, die metrischen Räume. Diese sind in den Analysis-Grundvorlesungen schon oft aufgetaucht. Hier gelingt es mit Hilfe des Abstandsbegriff, einer *Metrik*, obige Konzepte zu studieren.

1.1. Sei X eine Menge und $d\colon X\times X \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ eine Abbildung mit folgenden Eigenschaften:

(M1) Für je zwei Punkte x, $y \in X$ gilt $d(x,y) = 0$ genau dann, wenn $x = y$ gilt.
(M2) Für je zwei Punkte x, $y \in X$ gilt $d(x,y) = d(y,x)$.
(M3) Für je drei Punke x, y, $z \in X$ gilt $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$.

Das Axiom (M3) nennt man auch die Dreiecksungleichung.

Die Abbildung d heißt eine *Metrik* auf X. Das Paar (X,d) (oder auch nur X, wenn klar ist, was d ist) heißt *metrischer Raum*. Die Elemente von X heißen auch Punkte.

Beispiel 1.2. (1) (Diskrete Metrik) Auf einer beliebigen Menge X wird durch

$$d(x,y) = \begin{cases} 0, & x = y, \\ 1, & x \neq y. \end{cases}$$

eine Metrik definiert, die sog. diskrete Metrik.

(2) Sei V ein reeller oder komplexer Vektorraum. Sei $\| - \|\colon V \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ eine Norm auf V. Dann wird durch $d(x,y) = \|x - y\|$ eine Metrik auf V definiert.

(Wiederholung: Es gilt $\|x\| = 0$ genau dann, wenn x=0; $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$; $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.)

1.3. (Kugeln) Sei (X,d) ein metrischer Raum. Die Mengen

$$K_r(x) \overset{def}{=} \{y \in X \mid d(x,y) < r\}$$

(wobei $r > 0$ und $x \in X$ gilt) heißen *offene Kugeln*. Die Mengen

$$\overline{K}_r(x) \overset{def}{=} \{y \in X \mid d(x,y) \leq r\}$$

heißen *abgeschlossene Kugeln*.

1.4. (Offene Mengen) Sei (X, d) ein metrischer Raum. Eine Teilmenge $U \subseteq X$ heißt *offen*, wenn es zu jedem $x \in U$ ein $r = r(x) > 0$ gibt mit $K_r(x) \subseteq U$. Es gelten folgende Eigenschaften:

(O1) Die leere Menge ist offen, und X selbst ist offen. (Beweis trivial.)

(O2) Beliebige Vereinigung $\cup_{i \in I} U_i$ offener Mengen U_i $(i \in I)$ ist wieder offen. (Sei $x \in \cup_{i \in I} U_i$. Dann liegt x in (mindestens) einem U_i. Da U_i offen, gibt es $r > 0$ mit $K_r(x) \subseteq U_i$, also erst recht $K_r(x) \subseteq \cup_{i \in I} U_i$.)

(O3) Der Durchschnitt $\cap_{i=1}^{n} U_i$ von endlichen vielen offene Mengen U_i ist wieder offen. (Es genügt, die Aussage für $n = 2$ zu zeigen. Sei $x \in U_1 \cap U_2$. Dann gibt es r_1, $r_2 > 0$ mit $K_{r_1}(x) \subseteq U_1$ und $K_{r_2}(x) \subseteq U_2$. Ist $r = \min(r_1, r_2)$, so ist $r > 0$ und $K_r(x) \subseteq U_1 \cap U_2$.)

Ist X mit der diskreten Metrik ausgestattet, so ist *jede* Teilmenge von X offen.

Bemerkung 1.5. (1) Ist X mit der diskreten Metrik ausgestattet, so ist jede Teilmenge von X offen.
(2) Offene Kugeln sind offen.
(3) $A \subseteq X$ heißt abgeschlossen, wenn das Komplement $X \setminus A$ offen ist. (Achtung: Es gibt Menge, die sind offen *und* abgeschlossen (etwa $\emptyset$ und X), aber auch Menge, die weder offen noch abgeschlossem sind (etwa ein halboffenes Intervall in $\mathbb{R}$).
(4) $U \subseteq X$ ist offen genau dann, wenn jeder Punkt von U in einer offenen Kugel liegt (mit irgendeinem Mittelpunkt), die ganz in U enthalten ist.

2. Topologische Räume

Offene Mengen.

Definition 2.1. Sei X eine Menge und 2^X deren Potenzmenge. Eine Teilmenge $\mathcal{T} \subseteq 2^X$, also ein System von Teilmengen von X, heißt *Topologie*, wenn folgendes gilt:

(O1) Die leere Menge $\emptyset$ und X gehören zu $\mathcal{T}$;

(O2) Die Vereinigung beliebiger vieler Elemente von $\mathcal{T}$ ist wieder ein Element von $\mathcal{T}$.

(O3) Der Durchschnitt von endlichen vielen Elementen von $\mathcal{T}$ ist wieder ein Element von $\mathcal{T}$.

Die Elemente aus $\mathcal{T}$ heißen *offene Mengen*. Das Paar $(X, \mathcal{T})$ (oder einfach nur X, wenn klar ist, welche Topologie gemeint ist), heißt *topologischer Raum*. Die Elemente von X heißen auch *Punkte*.

Bemerkung 2.2. In (O3) kann man "endlich viele" durch "zwei" ersetzen. Das Axiom (O1) kann man auch (O2) und (O3) zuschlagen, denn die leere Menge ist die Vereinigung über einer leeren Indexmenge, und X ist der leere Durchschnitt.

Definition 2.3. Seien $\mathcal{T}_1$ und $\mathcal{T}_2$ Topologien auf demselben Raum X. Es heißt $\mathcal{T}_1$ *feiner* als $\mathcal{T}_2$, wenn $\mathcal{T}_2 \subseteq \mathcal{T}_1$ gilt, wenn also jede Menge, die offen bzgl. $\mathcal{T}_\in$ ist auch offen bzgl. $\mathcal{T}_1$ ist. In dem Fall heißt $\mathcal{T}_2$ auch *gröber* als $\mathcal{T}_1$. Gelten jeweils echte Teilmengenbeziehungen, so spricht man von echt feiner bzw. echt gröber.

Beispiel 2.4.

(1) Sei X eine Menge, sei $\mathcal{T} = 2^X$ ist die sog. *diskrete Topologie* auf X. Sie ist offenbar die feinste Topologie auf X.
(2) Sei X eine Menge, sei $\mathcal{T} = \{\emptyset, X\}$ ist und heißt die gröbste Topologie auf X.
(3) Sei (X, d) ein metrischer Raum. Dann definieren die in 1.4 definierten offenen Mengen eine Topologie $\mathcal{T}_d$ auf X, nach 1.4.
(4) Sei $X = \mathbb{R}^2$ und d_2 bzw. d_∞ die Metrik, die durch euklidische Norm $\|-\|_2$ bzw. durch $\|-\|_\infty$ induziert wird. Dann kann man leicht zeigen, dass $\mathcal{T}_2$ und $\mathcal{T}_\infty$ gleich sind. (Alle Normen auf $\mathbb{R}^n$ sind äquivalent.) Unterschiedliche Metriken können also dieselben Topologien induzieren.
(5) Metrische Räume sind also immer topologische Räume. Die Umkehrung gilt i. a. nicht. Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum. Gibt es eine Metrik d auf X mit $\mathcal{T}_d = \mathcal{T}$, so heißt $(X, \mathcal{T})$ *metrisierbar*. Nicht jeder topologische Raum ist metrisierbar. (Beispiel?)

Umgebungen.

2.5. (Umgebungen) Sei X ein topologischer Raum. Sei $A \subseteq X$. Eine Teilmenge $V \subseteq X$ heißt *Umgebung* von A, falls eine offene Menge U existiert mit $A \subseteq U \subseteq V$. Es heißt V eine Umgebung eines Punktes x, falls V Umgebung von $\{x\}$ ist. Eine Umgebung heißt *offene Umgebung*, falls sie eine offene Menge ist.

$y \in A$ heißt *innerer Punkt* von A, falls A Umgebung von y ist. Es heißt

$$A^\circ \overset{def}{=} \{y \in A \mid y \text{ ist innerer Punkt von } A\}$$

der *offene Kern* (oder das *Innere*) von A.

Proposition 2.6. *Sei X ein topologischer Raum und $A \subseteq X$. Dann ist der offene Kern A° von A die Vereinigungen aller offenen Mengen U mit $U \subseteq A$. Insbesondere ist A° offen, und ist die größte offene Menge, die Teilmenge von A ist.*

Beweis. Es gilt

$$\begin{aligned} x \in A^\circ \quad &\Leftrightarrow \quad A \text{ ist Umgebung von } x \\ &\Leftrightarrow \quad \exists\, U \text{ offen mit } x \in U \subseteq A \\ &\Leftrightarrow \quad x \in \cup_{U \subseteq A,\, U \text{ offen}} U. \end{aligned}$$

$\square$

Korollar 2.7. *$A \subseteq X$ ist offen genau dann, wenn $A^\circ = A$ gilt.*

Korollar 2.8. *Eine Teilmenge von X ist offen genau dann, wenn sie Umgebung aller ihrer Punkte ist.*

Beweis. “$\Rightarrow$” ist klar. “$\Leftarrow$” Sei $A \subseteq X$ Umgebung aller ihrer Punkte. Dann folgt sofort $A \subseteq A^\circ$, also $A = A^\circ$. $\square$

Proposition 2.9. *Sei X ein topologischer Raum, und seien A, $B \subseteq X$. Dann gilt*

(1) $(A^\circ)^\circ = A^\circ$.
(2) *Wenn* $A \subseteq B$, *dann* $A^\circ \subseteq B^\circ$.
(3) $(A \cap B)^\circ = A^\circ \cap B^\circ$.
(4) $(A \cup B)^\circ \supseteq A^\circ \cup B^\circ$.

Proposition 2.10. *Sei X ein topologischer Raum. Sei $x \in X$, und seien A, $B \subseteq X$. Dann gilt*

(1) *Ist A Umgebung von x und $B \supseteq A$, so ist auch B Umgebung von x.*
(2) *Sind A und B Umgebungen von x, so ist auch $A \cap B$ eine Umgebung von x.*
(3) *Die leere Menge $\emptyset$ ist keine Umgebung von x.*

Beweis. Trivial. $\square$

Dies motiviert folgende Definition:

Filter.

Definition 2.11. (Filter) Sei X eine nichtleere Menge. Sei $\emptyset \neq \mathcal{F} \subseteq 2^X$. Es heißt $\mathcal{F}$ ein *Filter* auf X, falls

(F1) Ist $A \in \mathcal{F}$, $B \subseteq X$ mit $B \supseteq A$, so gilt $B \in \mathcal{F}$.
(F2) Sind A, $B \in \mathcal{F}$, so gilt auch $A \cap B \in \mathcal{F}$.
(F3) $\emptyset \notin \mathcal{F}$.

Beispiel 2.12. (1) Sei M ein topologischer Raum und $x \in X$. Dann ist

$$\mathcal{W}(x) \overset{def}{=} \{V \subseteq X \mid V \text{ ist Umgebung von } x\}$$

nach obiger Proposition ein Filter und heißt *Umgebungsfilter* von x.
(2) Sei $\emptyset \neq E \subseteq X$. Dann ist $\{V \subseteq X \mid V \supseteq E\}$ ein Filter.
(3) Es ist $\{A \subseteq \mathbb{N} \mid \mathbb{N} \setminus A \text{ ist endlich}\}$ ein Filter, und heißt Fréchetfilter.

Definition 2.13. Sei $\mathcal{F}$ ein Filter auf einer Menge X. Eine Teilmenge $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{F}$ heißt (Filter-) *Basis* von $\mathcal{F}$, falls zu jedem $A \in \mathcal{F}$ ein $B \in \mathcal{B}$ existiert mit $B \subseteq A$.

Ist X ein topologischer Raum und $x \in X$, so heißt eine Basis des Umgebungsfilters $\mathcal{W}(x)$ eine *Umgebungsbasis* von x.

Beispiel 2.14. Sei X ein metrischer Raum. Dann bilden die $K_{1/n}(x)$ ($n \in \mathbb{N}$) eine Umgebungsbasis von x; diese ist abzählbar.

DEFINITION 2.15. Seien $\mathcal{F}_1$ und $\mathcal{F}_2$ Filter auf der Menge X. Es heißt $\mathcal{F}_1$ *feiner* als $\mathcal{F}_2$, falls $\mathcal{F}_1 \supseteq \mathcal{F}_2$ gilt. (Entsprechend wird gröber, echt feiner und echt gröber definiert.)

Ein Filter $\mathcal{F}$ auf X heißt *Ultrafilter*, falls es keinen echt feineren Filter auf X gibt.

SATZ 2.16. *Jeder Filter $\mathcal{F}$ auf einer Menge X ist in einem Ultrafilter enthalten.*

BEWEIS. Sei

$$M \stackrel{def}{=} \{\mathcal{F}' \mid \mathcal{F}' \supseteq \mathcal{F} \text{ ist Filter auf } X\}.$$

M ist bezüglich der mengentheoretischen Inklusion $\subseteq$ induktiv geordnet: Sei $L \subseteq M$ total geordnet. Dann ist $\cup_{\mathcal{F}' \in L} \mathcal{F}'$ wieder ein Filter (einfach), und eine obere Schranke von L. Also enthält M nach dem Zornschen Lemma ein maximales Element, und dies ist offensichtlich ein Ultrafilter. □

PROPOSITION 2.17. *Sei $\mathcal{F}$ ein Filter auf der Menge X. Genau dann ist $\mathcal{F}$ ein Ultrafilter, wenn für alle $A \subseteq X$ entweder $A \in \mathcal{F}$ oder $X \setminus A \in \mathcal{F}$ gilt.*

Bemerkung: Aufgrund der Filteraxiome kann nicht beides gelten.

BEWEIS. (1) Sei $\mathcal{F}$ ein Ultrafilter, und sei $A \subseteq X$ mit $A \notin \mathcal{F}$. Für alle $F \in \mathcal{F}$ gilt $F \cap (X \setminus A) \neq \emptyset$.

(Denn andernfalls gäbe es $F \in \mathcal{F}$ mit $F \cap (X \setminus A) = \emptyset$, und dann wäre $F \subseteq A$, also $A \in \mathcal{F}$, Widerspruch.)

Definiere

$$\mathcal{F}' \stackrel{def}{=} \mathcal{F} \cup \{F \subseteq X \mid \exists\, B \in \mathcal{F} \colon F \supseteq B \cap X \setminus A\}.$$

Dies ist (wie mein leicht zeigt) ein Filter mit $\mathcal{F}' \supseteq \mathcal{F}$, und weil $\mathcal{F}$ ein Ultrafilter ist, folgt $\mathcal{F} = \mathcal{F}'$. Es folgt $X \setminus A \in \mathcal{F}' = \mathcal{F}$.

(2) Es gelte, dass für jede Teilmenge A von X entweder $A \in \mathcal{F}$ ist oder $X \setminus A \in \mathcal{F}$. Sei $\mathcal{F}'$ ein echter Oberfilter von $\mathcal{F}$. Sei $A \in \mathcal{F}'$ mit $A \notin \mathcal{F}$. Dann gilt $X \setminus A \notin \mathcal{F}'$ (wegen $A \cap (X \setminus A) = \emptyset$ und (F2) und (F3)). Also gilt sowohl $A \notin \mathcal{F}$ als auch $X \setminus A \in \mathcal{F}$, Widerspruch. □

Charakterisierung einer Topologie durch Umgebungsfilter.

PROPOSITION 2.18. *Sei X ein topologischer Raum und $x \in X$. Dann gilt: Zu jedem $V \in \mathcal{W}(x)$ gibt es ein $W \in \mathcal{W}(x)$, so dass für jedes $y \in W$ gilt, dass $W \in \mathcal{W}(y)$ ist.*

BEWEIS. Sei V Umgebung von x. Nach Definition gibt es eine offene Menge W mit $x \in W \subseteq V$. Als offene Menge ist W Umgebung aller seiner Punkte. □

Der folgende Satz zeigt, wie man umgekehrt aus den Umgebungsfiltern die Topologie rekonstruieren kann:

SATZ 2.19. *Sei X eine Menge. Zu jedem $x \in X$ gebe es einen Filter $\mathcal{F}(x)$ mit folgenden Eigenschaften:*

(V1) *Jedes* $V \in \mathcal{F}(x)$ *enthält* x.
(V2) *Zu jedem* $V \in \mathcal{F}(x)$ *gibt es ein* $W \in \mathcal{F}(x)$ *mit* $W \subseteq V$ *und so, dass für jedes* $y \in W$ *gilt, dass* $W \in \mathcal{F}(y)$ *ist.*

Dann existiert eine eindeutig bestimmte Topologie $\mathcal{T}$ *auf* X *derart, dass für jedes* $x \in X$ *der Filter* $\mathcal{F}(x)$ *gerade der Umgebungsfilter* $\mathcal{W}(x)$ *ist.*

Beweis. (1) Eindeutigkeit: Sei $\mathcal{T}$ eine Topologie auf X mit Umgebungsfiltern $\mathcal{W}(x) = \mathcal{F}(x)$ $(x \in X)$. Sei $A \subseteq X$. Aus Korollar 2.8 folgt

$$A \in \mathcal{T} \;\Leftrightarrow\; \forall\, x \in A\colon A \in \mathcal{W}(x).$$

Also ist $\mathcal{T}$ durch die Umgebungsfilter $\mathcal{W}(x)$ $(x \in X)$ eindeutig definiert.

(2) Existenz: Setze (wie durch den Teil zuvor suggeriert)

$$\mathcal{T} \overset{def}{=} \{A \subseteq X \mid \forall\, x \in A\colon A \in \mathcal{F}(x)\}.$$

Aus den Filteraxiomen folgt leicht, dass $\mathcal{T}$ eine Topologie auf X ist. Seien $\mathcal{W}(x)$ die dazu definierten Umgebungsfilter. Dann gilt $\mathcal{W}(x) = \mathcal{F}(x)$: Denn sei $V \in \mathcal{W}(x)$. Dann existiert ein $U \in \mathcal{T}$ mit $x \in U \subseteq V$. Nach Definition von $\mathcal{T}$ ist $U \in \mathcal{F}(x)$, also auch $V \in \mathcal{F}(x)$.

Sei umgekehrt $V \in \mathcal{F}(x)$. Sei $W \in \mathcal{F}(x)$ eine Menge gemäß (V2). Nach Definition von $\mathcal{T}$ gilt dann $W \in \mathcal{T}$. Mit (V1) folgt $x \in W \subseteq V$, und damit auch $V \in \mathcal{W}(x)$. $\square$

Abgeschlossene Mengen.

Definition 2.20. (Abgeschlossene Mengen) Sei X ein topologischer Raum. $A \subseteq X$ heißt *abgeschlossen*, wenn das Komplement $X \setminus A$ offen ist.

Proposition 2.21. *Sei* X *ein topologischer Raum. Dann gilt:*

(A1) X *und* $\emptyset$ *sind abgeschlossen.*
(A2) *Der Durchschnitt von beliebig vielen abgeschlossenen Mengen ist abgeschlossen.*
(A3) *Die Vereinigung von endlich vielen abgeschlossenen Mengen ist abgeschlossen.*

Beweis. Trivial. Benutze $X \setminus (\cup A_i) = \cap(X \setminus A_i)$ und $X \setminus (\cap A_i) = \cup(X \setminus A_i)$. $\square$

Definition 2.22. Sei X ein topologischer Raum und $A \subseteq X$. Dann heißt

$$\overline{A} \overset{def}{=} \bigcap_{F \supseteq A,\, F \text{ abgeschl.}} F$$

die *abgeschlossene Hülle* oder der *Abschluss* von A.

Bemerkung 2.23. Sei $A \subseteq X$.

(1) $\overline{A}$ ist abgeschlossen.
(2) $\overline{A}$ ist die kleinste abgeschlossene Menge, die A enthält.
(3) Es ist A abgeschlossen genau dann, wenn $A = \overline{A}$ gilt.

PROPOSITION 2.24. *Sei X ein topologischer Raum, seien A, $B \subseteq X$. Dann gilt*

(1) $A \subseteq B \;\Rightarrow\; \overline{A} \subseteq \overline{B}$.
(2) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.
(3) $\overline{A \cap B} \subseteq \overline{A} \cap \overline{B}$.
(4) $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$.
(5) $\overline{X \setminus A} = X \setminus (A^\circ)$, $X \setminus \overline{A} = (X \setminus A)^\circ$.

BEWEIS. Man zeigt zunächst (5), und folgert dann die anderen Aussagen aus 2.9. □

Berühr- und Häufungspunkte.

DEFINITION 2.25. Sei X ein topologischer Raum. Sei $A \subseteq X$. Ein Punkt $x \in X$ heißt

(1) *Berührpunkt* von A, falls für alle Umgebungen V von x gilt $V \cap A \neq \emptyset$.
(2) *Häufungspunkt* von A, falls für alle Umgebungen V von x gilt $(V \cap A) \setminus \{x\} \neq \emptyset$.

PROPOSITION 2.26. *Seien X ein topologischer Raum, $A \subseteq X$ und $x \in X$. Genau dann ist x ein Berührpunkt von A, wenn $x \in \overline{A}$ gilt.*

Es ist also $\overline{A}$ die Menge aller Berührpunkte von A.

BEWEIS. (1) Sei $x \in \overline{A}$. Angenommen, es gibt eine Umgebung V von x mit $V \cap A = \emptyset$. Dann gibt es eine offene Umgebung U von x mit $U \subseteq V$, und es folgt auch $U \cap A = \emptyset$, d. h. $A \subseteq X \setminus U$. Da das Komplement $X \setminus U$ abgeschlossen ist, folgt $\overline{A} \subseteq \overline{X \setminus U} = X \setminus U$, also $U \cap \overline{A} = \emptyset$, Widerspruch zu $x \in U \cap \overline{A}$.

(2) Gelte $x \notin \overline{A}$. Dann ist x in der offenen Menge $X \setminus \overline{A}$, und daher ist $X \setminus \overline{A}$ eine Umgebung von x. Trivialerweise gilt $A \cap (X \setminus \overline{A}) = \emptyset$. □

BEMERKUNG 2.27. Jeder Häufungspunkt von A ist auch ein Berührpunkt von A. Die Umkehrung gilt i. a. nicht: Sei $\{x\} = A \subseteq X$. Es ist x Berührpunkt von A aber kein Häufungspunkt.

DEFINITION 2.28. Sei X ein topologischer Raum.

(1) Eine *Folge* in X ist eine Abbildung $\mathbb{N} \to X$, $n \mapsto x_n$. Dafür schreibt man wie üblich $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ oder nur (x_n).
(2) Ein $x \in X$ heißt *Häufungspunkt* von (x_n), wenn für alle Umgebungen V von x die Menge $\{n \in \mathbb{N} \mid x_n \in V\}$ unendlich ist.

DEFINITION 2.29. Sei X ein topologischer Raum, und sei $A \subseteq B \subseteq X$. Es heißt A *dicht in* B, falls $B \subseteq \overline{A}$ gilt. Es heißt A (überall) *dicht*, falls $\overline{A} = X$ gilt.

BEISPIEL 2.30. $\mathbb{Q}$ ist dicht in $\mathbb{R}$.

Definition 2.31. Sei X ein topologischer Raum und $\mathcal{F}$ ein Filter auf X. Ein $x \in X$ heißt *Berührpunkt* (oder auch: Häufungspunkt) von $\mathcal{F}$, falls für alle $A \in \mathcal{F}$ gilt, dass $x \in \overline{A}$ ist.

Proposition 2.32. *Sei X ein topologischer Raum und $\mathcal{F}$ ein Filter auf X. Genau dann ist $x \in X$ Berührpunkt von $\mathcal{F}$, falls für alle Umgebungen V von x und für alle $A \in \mathcal{F}$ gilt $V \cap A \neq \emptyset$.*

Beweis. Direkt aus 2.26. □

3. Stetige Abbildungen

Stetigkeit.

Definition 3.1. Seien X und Y topologische Räume. Sei $x \in X$. Eine Abbildung $f\colon X \to Y$ heißt *stetig in x*, falls für alle Umgebungen W von $f(x)$ (in Y) gilt, dass die Urbildmenge $f^{-1}(W)$ eine Umgebung von x ist. Die Abbildung $f\colon X \to Y$ heißt *stetig*, wenn sie stetig in jedem Punkt $x \in X$ ist.

Proposition 3.2. *Seien X und Y metrische Räume, und sei $f\colon X \to Y$ eine Abbildung. Genau dann ist f (im obigen Sinn) stetig in $x \in X$, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, so dass $K_\delta(x) \subseteq f^{-1}(K_\varepsilon(f(x))$ gilt. (Dabei werden die offenen Kugeln jeweils in X bzw. Y gebildet.)*

Die zweite Eigenschaft ist offenbar gleichwertig zu der üblichen ε-δ-Definiton der Stetigkeit in metrischen Räumen:

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0\ \forall\, x' \in X\colon d_X(x, x') < \delta \ \Rightarrow\ d_Y(f(x), f(x')) < \varepsilon.$$

Beweis. Einfach. □

Satz 3.3. *Seien X, Y und Z topologische Räume, sei $x \in X$. Sei $f\colon X \to Y$ stetig in x und $g\colon Y \to Z$ stetig in $f(x)$. Dann ist die Komposition $g \circ f\colon X \to Z$ stetig in x.*

Beweis. Sei W eine Umgebung von $g(f(x))$. Da g stetig ist in $f(x)$, ist $g^{-1}(W)$ eine Umgebung von $f(x)$, und da f stetig in x, ist $(g \circ f)^{-1}(W) = f^{-1}(g^{-1}(W))$ eine Umgebung von x. □

Korollar 3.4. *Seien X, Y und Z topologische Räume, sei $x \in X$. Sei $f\colon X \to Y$ stetig. Dann ist $g \circ f\colon X \to Z$ stetig.*

Satz 3.5. *Seien X und Y topologische Räume. Sei $f\colon X \to Y$ eine Abbildung. Folgende Aussagen sind äquivalent:*

(1) *f ist stetig.*
(2) *Für alle offenen Mengen $U \subseteq Y$ ist das Urbild $f^{-1}(U)$ offen.*
(3) *Für alle abgeschlossenen Mengen $B \subseteq Y$ ist das Urbild $f^{-1}(B)$ abgeschlossen.*
(4) *Für alle $A \subseteq X$ gilt $f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$.*

Beweis. (1)⇒(2) Sei f stetig, $U \subseteq Y$ sei offen und $x \in f^{-1}(U)$. Es ist U eine Umgebung von $f(x)$, also enthält $f^{-1}(U)$ wegen der Stetigkeit von f in x eine Umgebung von x, und damit ist $f^{-1}(U)$ offen.

(2)⇒(1) Sei $x \in X$ und V eine Umgebung von $f(x)$. Dann gibt es eine offene Umgebung U von $f(x)$ mit $U \subseteq V$. Das Urbild $f^{-1}(U)$ ist offen, enthält x und ist in $f^{-1}(V)$ enthalten. Daher ist $f^{-1}(V)$ eine Umgebung von x.

Die Äquivalenz von (2) und (3) folgt aus der Beziehung $f^{-1}(Y \setminus A) = X \setminus f^{-1}(A)$.

(4)⇒(3) Sei $B \subseteq Y$ abgeschlossen. Sei $A \overset{def}{=} f^{-1}(B)$. Dann

$$f(\overline{A}) \overset{(4)}{\subseteq} \overline{f(A)} = \overline{f(f^{-1}(B))} \subseteq \overline{B} = B,$$

und damit

$$\overline{A} \subseteq f^{-1}(f(\overline{A})) \subseteq f^{-1}(B) = A \subseteq \overline{A},$$

also $\overline{A} = A$, und A ist abgeschlossen.

(1)⇒(4) Sei $A \subseteq X$, sei $x \in \overline{A}$ und f stetig in x. Sei W eine Umgebung von $f(x)$. Dann ist $f^{-1}(W)$ eine Umgebung von x, und daher ist $f^{-1}(W) \cap A \neq \emptyset$. Aber dann ist auch $f(f^{-1}(W) \cap A) \neq \emptyset$, und diese Menge ist enthalten in $f(f^{-1}(W)) \cap f(A) \subseteq W \cap f(A)$. Daher ist $f(x) \in \overline{f(A)}$. □

Vergleich von Topologien.

Proposition 3.6. *Seien $\mathcal{T}_1$ und $\mathcal{T}_2$ zwei Topologien auf X. Genau dann ist $\mathcal{T}_1$ feiner als $\mathcal{T}_2$, wenn die Identität $id\colon (X, \mathcal{T}_1) \to (X, \mathcal{T}_2)$ stetig ist.*

Beweis. Klar. □

Abbildungen von Filtern.

Definition 3.7. Seien X und X' nichtleere Mengen. Seien $f\colon X \to X'$ eine Abbildung und $\mathcal{F}$ ein Filter auf X. Dann heißt

$$f(\mathcal{F}) = \{A' \subseteq X' \mid \exists\, A \in \mathcal{F}\colon A' \supseteq f(A)\}$$

der *Bildfilter* von $\mathcal{F}$ bzgl. f.

Bemerkung 3.8. (1) Man prüft sofort nach, dass $f(\mathcal{F})$ ein Filter auf X' ist.
(2) $\{f(A) \mid A \in \mathcal{F}\}$ ist eine Basis von $f(\mathcal{F})$.

Satz 3.9. *Seien X und X' nichtleere Mengen. Seien $f\colon X \to X'$ eine Abbildung und $\mathcal{F}$ ein Ultrafilter auf X. Dann ist $f(\mathcal{F})$ ein Ultrafilter auf X'.*

Beweis. Sei $A' \subseteq X'$ mit $A' \notin f(\mathcal{F})$. Zu zeigen ist $X' \setminus A' \in f(\mathcal{F})$. Zunächst gilt $f^{-1}(A') \notin \mathcal{F}$, denn sonst wäre A' als Obermenge von $f(f^{-1}(A')$ in $f(\mathcal{F})$. Da $\mathcal{F}$ ein Ultrafilter ist, folgt $f^{-1}(X' \setminus A') = X \setminus f^{-1}(A') \in \mathcal{F}$, und es folgt $X' \setminus A' \supseteq f(f^{-1}(X' \setminus A')) \in f(\mathcal{F})$. □

Definition 3.10. Sei X eine Menge und (x_n) eine Folge in X. Sei $\mathcal{F}_e$ der Fréchetfilter auf $\mathbb{N}$ (vgl. 2.12). Dann heißt das Bild von $\mathcal{F}_e$ unter der Abbildung $\mathbb{N} \to X$, $n \mapsto x_n$ der *Elementarfilter* $\mathcal{F}_{el}$ der Folge.

Eine Teilmenge $A \subseteq X$ gehört also genau dann zu $\mathcal{F}_{el}$, wenn sie alle x_n bis auf endlich viele Ausnahmen enthält, wenn A also ein sog. *Endstück* der Folge enthält.

Satz 3.11. *Sei X ein topologischer Raum, sei (x_n) eine Folge in X und $x \in X$. Genau dann ist x ein Häufungspunkt von (x_n), wenn x ein Berührpunkt des zugehörigen Elementarfilters $\mathcal{F}_{el}$ ist.*

Beweis. "$\Rightarrow$" Sei x ein Häufungspunkt von (x_n). Sei V eine Umgebung von x. Dann liegen in V unendlich viele Glieder der Folge. Also hat V mit jedem $A \in \mathcal{F}_{el}$ nichtleeren (sogar unendlichen) Durchschnitt. Daher ist x ein Berührpunkt von $\mathcal{F}_{el}$.

"$\Leftarrow$" Sei V eine Umgebung von x. Definiere induktiv eine Teilfolge $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ von (x_n) mit $(x_{n_k}) \in V$ für alle $k \in \mathbb{N}$. $k = 1$: Sei $A \overset{def}{=} \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\} \in \mathcal{F}_{el}$. Wegen $x \in \overline{A}$ gibt es ein $n_1 \in \mathbb{N}$ mit $x_{n_1} \in V$. Sind $n_1 < n_2 < \cdots < n_k$ bereits definiert. Sei $A \overset{def}{=} \{x_n \mid n > n_k\} \in \mathcal{F}_{el}$. Wieder gibt es wegen $x \in \overline{A}$ ein $n_{k+1} > n_k$ mit $x_{n_{k+1}} \in V$. Also liegen unendliche viele Folgenglieder in V. Es folgt, dass x ein Häufungspunkt von (x_n) ist. □

Satz 3.12. *Seien X und X' topologische Räume, und sei $f\colon X \to X'$ eine stetige Abbildung. $\mathcal{F}$ sei ein Filter auf X und x ein Berührpunkt von $\mathcal{F}$. Dann ist $f(x)$ ein Berührpunkt von $f(\mathcal{F})$.*

Beweis. Sei $A' \in f(\mathcal{F})$. Dann existiert ein $A \in \mathcal{F}$ mit $A' \supseteq f(A)$. Da $x \in \overline{A}$ ist, folgt mit 3.5 (4), dass $f(x) \in \overline{f(A)} \subseteq \overline{A'}$ ist. □

Induzierte Topologie. Spurtopologie auf Teilräumen.

Satz 3.13 (Induzierte Topologie). *Sei X eine Menge, $(X', \mathcal{T}')$ ein topologischer Raum und $f\colon X \to X'$ eine Abbildung. Dann ist*

$$f^{-1}(\mathcal{T}') \overset{def}{=} \{f^{-1}(U') \mid U' \in \mathcal{T}'\}$$

eine Topologie auf X, die sogenannte induzierte Topologie. *Sie ist die gröbste Topologie auf X, so dass f stetig ist.*

Beweis. Einfach. □

Definition 3.14 (Teilraum). Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum und $A \subseteq X$. Sei $\iota\colon A \to X$, die natürliche Inklusion $x \mapsto x$. Sei $\mathcal{T}_A \overset{def}{=} \iota^{-1}(\mathcal{T})$. Dann heiß der topologische Raum $(A, \mathcal{T}_A)$ *Teilraum* oder *Unterraum* von X. Die Topologie $\mathcal{T}_A$ heißt *Relativtopologie*, *Spurtopologie* oder die von X auf A *induzierte* Topologie. Wenn nichts anderes gesagt wird, versehen wir Teilräume immer mit der induzierten Topologie.

Bemerkung 3.15. Ist (X, d) ein metrischer Raum, so wird die Spurtopologie auf $A \subseteq X$ gerade durch die Metrik $d_{|A\times A}$ induziert.

Satz 3.16. *Sei X ein topologischer Raum und $Y \subseteq X$. Eine Teilmenge $A \subseteq Y$ ist genau dann offen (bzw. abgeschlossen) bzgl. der Spurtopologie $\mathcal{T}_Y$, falles es eine offene (bzw. abgeschlossene) Menge $U \subseteq X$ gibt mit $A = U \cap Y$.*

Beweis. Das Urbild einer Menge $U \subseteq X$ unter der Inklusionsabbildung $\iota\colon Y \to X$ ist $\iota^{-1}(U) = U \cap Y$. Die Behauptung folgt dann unmittelbar aus der Definition der Spurtopologie. $\square$

Korollar 3.17. *Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum und $Y \subseteq X$. Genau dann gilt $\mathcal{T}_Y \subseteq \mathcal{T}$, wenn $Y \in \mathcal{T}$ gilt.*

Limiten. Konvergenz.

Definition 3.18. Sei X ein topologischer Raum, sei $\mathcal{F}$ ein Filter auf X und (x_n) eine Flge in X.

(1) Es heißt $x \in X$ ein *Limes* von $\mathcal{F}$, wenn $\mathcal{F} \supseteq \mathcal{W}(x)$ gilt. Man schreibt $\mathcal{F} \to x$. Sei
$$\operatorname{Lim} \mathcal{F} \overset{def}{=} \{x \in X \mid x \text{ ist Limes von } \mathcal{F}\}.$$
$\mathcal{F}$ heißt *konvergent*, falls $\operatorname{Lim} \mathcal{F} \neq \emptyset$.

(2) Es heißt $x \in X$ ein *Limes* von (x_n), wenn x ein Limes des zugehörigen Elementarfilters $\mathcal{F}_{el}$ ist. Man schreibt $x_n \to x$. Sei
$$\operatorname{Lim}(x_n) \overset{def}{=} \{x \in X \mid x \text{ ist Limes von } (x_n)\}.$$
(x_n) heißt *konvergent*, falls $\operatorname{Lim}(x_n) \neq \emptyset$.

Beispiel 3.19. Sei $X = \{1, 2\}$ aufgestattet mit der gröbsten Topologie $\mathcal{T} = \{\emptyset, X\}$, und sei (x_n) die konstante Folge mit $x_n = 1$. Dann gilt $\operatorname{Lim}(x_n) = X$. Eine konvergente Folge kann also mehr als einen Limes haben.

Proposition 3.20. *Sei X ein topologischer Raum, (x_n) eine Folge in X und $x \in X$. Genau dann gilt $x_n \to x$, wenn in jeder Umgebung V von x fast alle (d. h. alle bis auf endlich viele) Glieder der Folge liegen.*

Beweis. Folgt unmittelbar aus der Definition von $\mathcal{F}_{el}$. $\square$

Proposition 3.21. *Sei X ein topologischer Raum, $\mathcal{F}$ ein Filter auf X und $x \in X$. Ist $x \in \operatorname{Lim} \mathcal{F}$, so ist x ein Berührpunkt von $\mathcal{F}$.*

Beweis. Sei $A \in \mathcal{F}$ und V eine Umgebung von x. Ist $x \in \operatorname{Lim} \mathcal{F}$, so ist $\mathcal{F} \supseteq \mathcal{W}(x)$, also folgt $V \in \mathcal{F}$. Daher ist $V \cap A \in \mathcal{F}$, und daher insbesondere $V \cap A \neq \emptyset$. $\square$

Stetigkeit und Konvergenz.

Satz 3.22. *Seien X und X' topologische Räume, sei $f\colon X \to X'$ eine Abbildung und $x \in X$. Dann sind äquivalent:*

(1) *f ist stetig in x.*
(2) *$f(x) \in \operatorname{Lim} f(\mathcal{W}(x))$.*
(3) *Für jeden Filter $\mathcal{F}$ auf X mit $x \in \operatorname{Lim} \mathcal{F}$ gilt $f(x) \in \operatorname{Lim} f(\mathcal{F})$.*

Beweis. (1)⇒(2): Sei f stetig in x. Zu zeigen ist $f(\mathcal{W}(x)) \supseteq \mathcal{W}(f(x))$. Sei also $A \in \mathcal{W}(f(x))$. Wegen der Stetigkeit ist $f^{-1}(A) \in \mathcal{W}(x)$. Damit ist $A \supseteq f(f^{-1}(A))$ in $f(\mathcal{W}(x))$.

(2)⇒(3): Es gelte (2), und es sei $\mathcal{F}$ ein Filter auf X mit $x \in \operatorname{Lim} \mathcal{F}$. Dann ist $\mathcal{F} \supseteq \mathcal{W}(x)$. Dann folgt $f(\mathcal{F}) \supseteq f(\mathcal{W}(x)) \overset{(2)}{\supseteq} \mathcal{W}(f(x))$, also ist $f(x) \in \operatorname{Lim} f(\mathcal{F})$.

(3)⇒(1): Es gelte (3), und sei $V \in \mathcal{W}(f(x))$. Trivialerweise ist $x \in \operatorname{Lim} \mathcal{W}(x)$, also folgt $f(x) \in \operatorname{Lim} f(\mathcal{W}(x))$ aus (3), und das bedeutet $f(\mathcal{W}(x)) \supseteq \mathcal{W}(f(x))$. Also ist $V \in f(\mathcal{W}(x))$, d. h. es gibt ein $V' \in \mathcal{W}(x)$ mit $V \supseteq f(V')$. Daraus ergibt sich $f^{-1}(V) \supseteq f^{-1}(f(V')) \supseteq V'$, also gilt $V \in \mathcal{W}(x)$. Es folgt die Stetigkeit von f in x. □

Definition 3.23. Seien X und Y topologische Räume. Eine Abbildung $f\colon X \to Y$ heißt *Homöomorphismus* oder *topologisch*, wenn folgende drei Bedingungen gelten:

(i) f ist bijektiv.
(ii) f ist stetig.
(iii) Die Umkehrabbildung f^{-1} ist stetig.

Zwei topologische Räume heißen *homöomorph*, wenn es einen Homöomorphismus zwischen ihnen gibt. (Dies ist offenbar eine Äquivalenzrelation.)

Bemerkung 3.24. (1) Eine bijektive Abbildung (zwischen topologischen Räumen) ist genau dann ein Homöomorphismus, wenn die Bilder und die Urbilder aller offenen (bzw. abgeschlossenen) Mengen offen (bzw. abgeschlossen) sind.

(2) Sei $X = \{1, 2\}$ ausgestattet mit der diskreten Topologie und $X' = \{1, 2\}$ ausgestattet mit der gröbsten Topologie. Dann ist die Identität $id\colon X \to X'$ bijektiv und stetig aber kein Homöomorphismus.

4. Hausdorffräume. Abzählbarkeitsaxiome

Hausdorffräume. Eindeutigkeit von Limiten.

Definition 4.1. Ein topologischer Raum X heißt *Hausdorffraum* oder *separierter* Raum, wenn es für alle $x, y \in X$ mit $x \neq y$ immer disjunkte Umgebungen $U \in \mathcal{W}(x)$ und $V \in \mathcal{W}(y)$ gibt.

Beispiel 4.2. (1) Metrische Räume sind separiert. (Vgl. Aufgabe 1. (e).) Sind nämlich x und y zwei verschiedene Punkte, so gilt $r \overset{def}{=} d(x, y)/2 > 0$, und es gilt $K_r(x) \cap K_r(y) = \emptyset$.

Insbesondere ist $\mathbb{K}^N$ (mit der üblichen Topologie) separiert. ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$.)

(2) Ist ein Raum X mit der diskreten Topologie ausgestattet, so ist er separiert. Ist er mit der gröbsten Topologie ausgestattet, so ist er nicht separiert, sofern X mindestens zwei Elemente enthält.

(3) Teilräume von separierten Räumen sind separiert.

(4) Der $\mathbb{R}^N$ ausgestattet mit der Zariski-Topologie (vgl. Aufgabe 10.) ist nicht separiert.

SATZ 4.3. *Sei X ein topologischer Raum. Genau dann ist X separiert, wenn jeder konvergente Filter auf X genau einen Limes besitzt.*

BEWEIS. "$\Rightarrow$": Sei X separiert, und sei $\mathcal{F}$ ein Filter auf X. Nehme an, es gäbe $x, y \in \operatorname{Lim}\mathcal{F}$ mit $x \neq y$. Seien U und V disjunkte Umgebungen von x bzw. y. Dann gilt $\mathcal{F} \supseteq \mathcal{W}(x) \cup \mathcal{W}(y)$. Insbesondere sind dann $U, V \in \mathcal{F}$, also auch $\emptyset = U \cap V \in \mathcal{F}$, Widerspruch.

"$\Leftarrow$": Sei X nicht separiert. Dann gibt es Punkte $x \neq y$, so dass jede Umgebung von x einen nichtleeren Schnitt mit jeder Umgebung von y hat. Definiere nun den folgenden Filter:

$$\mathcal{F} \overset{def}{=} \{A \subseteq X \mid \exists\, U \in \mathcal{W}(x)\ \exists\, V \in \mathcal{W}(y)\colon A \supseteq U \cap V\}.$$

Die Gültigkeit der Filteraxiome prüft man leicht nach; aus der Voraussetzung folgt $\emptyset \notin \mathcal{F}$. Nach Konstruktion gilt $\mathcal{F} \supseteq \mathcal{W}(x) \cup \mathcal{W}(y)$, also $x, y \in \operatorname{Lim}\mathcal{F}$. □

Basen. Abzählbarkeitsaxiome.

DEFINITION 4.4. Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum.

(1) $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{T}$ heißt eine *Basis* von $\mathcal{T}$, falls jedes $U \in \mathcal{T}$ eine Vereinigung von geeigneten Menge aus $\mathcal{B}$ ist.
(2) $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{T}$ heißt eine *Subbasis* oder ein *Erzeugendensystem* von $\mathcal{T}$, falls die endlichen Durchschnitte von Menge aus $\mathcal{S}$ eine Basis von $\mathcal{T}$ bilden.

BEISPIEL 4.5. (1) Sei (X, d) ein metrischer Raum. Dann ist

$$\mathcal{B} = \{K_{1/n}(x) \mid n \in \mathbb{N},\, x \in X\}$$

eine Basis von $\mathcal{T}_d$.

(2) Es ist

$$\mathcal{B} = \{K_{1/n}(x) \mid n \in \mathbb{N},\, x \in \mathbb{Q}^N\}$$

eine Basis der Topologie auf $\mathbb{R}^N$. Diese Basis ist abzählbar.

(3) $\{\,]-\infty, a[\ \mid a \in \mathbb{R}\} \cup \{\,]a, \infty[\ \mid a \in \mathbb{R}\}$ ist eine Subbasis aber keine Basis der üblichen Topologie von $\mathbb{R}$.

PROPOSITION 4.6. *Sei X eine Menge und $\mathcal{S} \subseteq 2^X$. Dann gibt es eine eindeutig bestimmte Topologie $\mathcal{T}$ auf X derart, dass $\mathcal{S}$ eine Subbasis von $\mathcal{T}$ ist. Es besteht $\mathcal{T}$ gerade aus denjenigen Teilmengen $U \subseteq X$, die Vereiningung von endlichen Durchschnitten von Mengen von $\mathcal{S}$ sind.*

BEWEIS. Klar. □

DEFINITION 4.7. Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum.

(1) X erfüllt *das erste Abzählbarkeitsaxiom*, falls jeder Punkt $x \in X$ eine abzählbare Umgebungsbasis besitzt (vgl. 2.13).

(2) X erfüllt *das zweite Abzählbarkeitsaxiom*, falls $\mathcal{T}$ eine abzählbare Basis besitzt.

Bemerkung 4.8. (1) Aus dem zweiten Abzählbarkeitsaxiom folgt das erste. Denn ist $\mathcal{B}$ eine Basis der Topologie, so ist $\mathcal{B} \cap \mathcal{W}(x)$ eine Umgebungsbasis von x.

(2) $\mathbb{R}$ ausgestattet mit der diskreten Topologie erfüllt das erste Abzählbarkeitsaxiom (denn $\{x\}$ ist eine Basis von $\mathcal{W}(x)$), aber nicht das zweite (denn die offenen Menge $\{x\}$ $(x \in \mathbb{R})$ lassen sich nicht durch Vereinigung von abzählbar vielen offenen Mengen darstellen).

(3) Metrische Räume erfüllen das erste Abzählbarkeitsaxiom. (Vgl. 2.14.)

(4) $\mathbb{K}^N$ (mit der üblichen Topologie) erfüllt das zweite Abzählbarkeitsaxiom.

5. Kompaktheit

Satz 5.1. *Sei X ein topologischer Raum. Folgende Aussagen sind äquivalent:*

(1) *Jede offene Überdeckung von X enthält eine endliche Teilüberdeckung, d. h. ist $X = \cup_{i \in I} U_i$, wobei U_i offen ist für jedes $i \in I$, so gibt es $i_1, \ldots, i_k \in I$ mit $X = \cup_{j=1}^{k} U_{i_j}$.*

(2) *Ist $\emptyset = \cap_{i \in I} A_i$, wobei A_i abgeschlossen ist für jedes $i \in I$, so gibt es $i_1, \ldots, i_k \in I$ mit $\emptyset = \cap_{j=1}^{k} A_{i_j}$.*

(3) *Jeder Filter auf X besitzt einen Berührpunkt.*

(4) *Jeder Ultrafilter auf X konvergiert.*

Definition 5.2. Ein topologischer Raum, der die Bedingungen aus dem Satz erfüllt, heißt *quasikompakt*. Ist er zusätzlich separiert, so heißt er *kompakt*.

Beweis von Satz 5.1. Die Äquivalenz von (1) und (2) ergibt sich sofort durch Komplementbildung.

(2)⇒(3): Sei $\mathcal{F}$ ein Filter ohne Berührpunkt. Dann ist

$$\{\overline{A} \mid A \in \mathcal{F}\}$$

eine Familie von abgeschlossenen Mengen, die (2) nicht erfüllt.

(3)⇒(4): Sei $\mathcal{F}$ ein Ultrafilter auf X. Wegen (3) gibt es einen Berührpunkt x. Wir zeigen $\mathcal{F} \to x$. Sei $V \in \mathcal{W}(x)$. Dann ist offenbar

$$\mathcal{F}' \stackrel{def}{=} \{A \subseteq X \mid \exists\, F \in \mathcal{F} \colon A \supseteq F \cap V\}$$

ein Filter, und es gilt $\mathcal{F}' \supseteq \mathcal{F}$. Es folgt $\mathcal{F}' = \mathcal{F}$, und damit $V \in \mathcal{F}$. Es ergibt sich $\mathcal{F} \supseteq \mathcal{W}(x)$.

(4)⇒(2): Seien $A_i \subseteq X$ abgeschlossen $(i \in I)$ mit $\cap_{i \in E} A_i \neq \emptyset$ für alle endlichen Teilmengen $E \subseteq I$. Dann definiert

$$\mathcal{F} \stackrel{def}{=} \{A \subseteq X \mid \exists\, E \subseteq I \text{ endlich} \colon A \supseteq \cap_{i \in E} A_i\}$$

ein Filter auf X. Nach Satz 2.16 gibt es einen Ultrafilter $\mathcal{F}' \supseteq \mathcal{F}$. Wegen (4) gibt es ein $x \in \operatorname{Lim} \mathcal{F}'$. Sei $i \in I$. Wegen $A_i \in \mathcal{F}'$ gilt dann $x \in \overline{A_i} = A_i$. Es folgt $x \in \cap_{i \in I} A_i$, also $\cap_{i \in I} A_i \neq \emptyset$. □

Beispiel 5.3. Eine Teilmenge $A \subseteq \mathbb{K}^N$ ist kompakt genau dann, wenn A abgeschlossen und beschränkt ist. (Satz von Heine-Borel.)

Definition 5.4. Ein topologischer Raum (bzw. Hausdorffraum) heißt

(1) *abzählbar quasikompakt* (bzw. *abzählbar kompakt*), wenn jede Folge einen Häufungspunkt besitzt;
(2) *folgenquasikompakt* (bzw. *folgenkompakt*), wenn jede Folge eine konvergente Teilfolge besitzt.

Satz 5.5. *Sei X ein topologischer Raum. Dann sind äquivalent:*

(1) *X ist abzählbar quasikompakt.*
(2) *Jeder Elementarfilter auf X besitzt einen Berührpunkt.*
(3) *Jede abzählbar offene Überdeckung von X besitzt eine endliche Teilüberdeckung.*

Beweis. Die Äquivalenz von (1) und (2) folgt aus Satz 3.11.

(1)$\Rightarrow$(3) Es gelte (1). Seien $U_n \subseteq X$ offen ($n \in \mathbb{N}$) mit $X = \cup_{n=1}^{\infty} U_n$. Annahme: Für jedes $k \in \mathbb{N}$ gilt $X \supsetneq \cup_{n=1}^{k} U_n$. Wähle $x_k \in X \setminus \cup_{n=1}^{k} U_n$. Sei x ein Häufungspunkt der Folge (x_k). Da die U_n den Raum X überdecken, gibt es $k_0 \in \mathbb{N}$ mit $x \in U_{k_0}$. In der Umgebung U_{k_0} von x liegen dann unendlich viele Glieder der Folge. Widerspruch, denn für $n > k_0$ gilt $x_n \notin U_{k_0}$.

(3)$\Rightarrow$(2) Sei (x_n) eine Folge in X, so dass $\mathcal{F}_{el}$ keinen Berührpunkt besitzt. Sei $x \in X$. Dann gibt es ein $A \in \mathcal{F}_{el}$ mit $x \notin \overline{A}$. Es gibt ein $n \in \mathbb{N}$ mit $A \supseteq \{x_n, x_{n+1}, \dots\}$, d. h. $x \notin \overline{\{x_n, x_{n+1}, \dots\}}$. Es folgt $X = \cup_{n=1}^{\infty} X \setminus \overline{\{x_n, x_{n+1}, \dots\}}$. Dies ist eine abzählbare offene Überdeckung von X. Dies enthält keine endliche Teilüberdeckung, denn andernfalls gäbe es ein $k \in \mathbb{N}$ mit $X = \cup_{n=1}^{k} X \setminus \overline{\{x_n, x_{n+1}, \dots\}}$, was aber den Widersrpuch $\emptyset = \cap_{n=1}^{k} \overline{\{x_n, x_{n+1}, \dots\}} = \overline{\{x_k, x_{k+1}, \dots\}}$ ergibt. □

Satz 5.6. *Sei X ein topologischer Raum. Ist X quasikompakt oder folgenquasikompakt, dann ist X abzählbar quasikompkakt.*

Beweis. (1) Sei X quasikompakt. Jeder Filter in X hat einen Berührpunkt, also auch jeder Elementarfilter.

(2) Sei X folgenquasikompakt. Sei (x_n) eine Folge in X. Dann existiert eine Teilfolge $(x_{n_k})_k$ und ein $x \in X$ mit $x_{n_k} \to x$, und es folgt aus Satz 3.11 und Proposition 3.21, dass x ein Berührpunkt des Elementarfilters der Teilfolge ist. Also ist x auch Berührpunkt des gröberen Elementarfilters von (x_n). □

Bemerkung 5.7. Ein abzählbar quasikompakter Raum X muss weder quasikompakt noch folgenquasikompakt sein.

Satz 5.8. *Der topologische Raum X genüge dem ersten Abzählbarkeitsaxiom. Ist X abzählbar quasikompakt, so ist X folgenquasikompakt.*

Beweis. Sei (x_n) eine Folge in X. Sei x ein Häufungspunkt von (x_n), und sei $\{V_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ eine Basis von $\mathcal{W}(x)$. Ohne Einschränkung können wir $V_{n+1} \subseteq V_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ annehmen. (Andernfalls betrachte $W_n \overset{def}{=} \cap_{k \leq n} V_k$.)

Definiere eine Teilfolge (x_{n_k}) von (x_n) wie folgt: V_1 enthält unendlich viele Glieder der Folge (x_n). Wähle $n_1 \in \mathbb{N}$ mit $x_{n_1} \in V_1$. Seien $n_1, n_2, \dots, n_k$ bereits definiert. V_{k+1} enthält unendlich viele Glieder der Folge (x_n). Wähle $n_{k+1} \in \mathbb{N}$ mit $n_{k+1} > n_k$ und $x_{n_{k+1}} \in V_{k+1}$. Es folgt sofort $x_{n_k} \to x$. □

Kompaktheit in Teilräumen.

Proposition 5.9. *Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum und $A \subseteq X$. Genau dann ist A quasikompakt bzgl. $\mathcal{T}_A$, falls gilt: Ist $A \subseteq \cup_{i \in I} U_i$ mit $U_i \in \mathcal{T}$ $(i \in I)$, so gibt es $i_1, \dots, i_n \in I$ mit $A \subseteq \cup_{k=1}^n U_{i_k}$.*

Beweis. Klar nach Definition der Spurtopologie $\mathcal{T}_A$. □

Definition 5.10. Sei X ein topologischer Raum, sei $A \subseteq X$. Es heißt A *relativ (quasi-) kompakt*, falls $\overline{A}$ (quasi-) kompakt ist.

Satz 5.11. *Jede kompakte Teilmenge eines Hausdorffraums $(X, \mathcal{T})$ ist abgeschlossen.*

Beweis. Sei $A \subseteq X$ kompakt. Sei $x \in X \setminus A$ fest. Zu jedem $a \in A$ gibt es Mengen U_a, $V_a \in \mathcal{T}$ mit $x \in U_a$, $a \in V_a$ und $U_a \cap V_a = \emptyset$. Es ist dann $(V_a)_{a \in A}$ eine offene Überdeckung von A, es gibt also $a_1, \dots, a_n \in A$ mit $A \subseteq \cup_{i=1}^n V_{a_i}$. Es ist dann $U \overset{def}{=} \cap_{i=1}^n U_{a_i}$ eine Umgebung von x mit $U \cap A = \emptyset$, also $U \subseteq X \setminus A$. Also ist $X \setminus A$ offen. □

Satz 5.12. *Jede abgeschlossene Teilmenge eines quasikompakten topologischen Raumes X ist quasikompakt.*

Beweis. Sei $A \subseteq X$ abgeschlossen. sei $\mathcal{F}$ ein Filter auf A. Sei $\mathcal{F}'$ der Filter $\{F' \subseteq X \mid \exists\, F \in \mathcal{F} \colon F' \subseteq F\}$ auf X. Dieser hat, da X quasikompakt ist, einen Berührpunkt x. Wegen $A \in \mathcal{F}'$ gilt $x \in \overline{A} = A$. Es ist dann leicht zu sehen, dass x auch ein Berührpunkt von $\mathcal{F}$ bzgl. $\mathcal{T}_A$ ist. □

Kompaktheit unter stetigen Abbildungen.

Satz 5.13. *Seien $f \colon X \to Y$ eine stetige Abbildung topologischer Räume. Ist X quasikompakt, so ist $f(X)$ quasikompakt.*

Beweis. Sei $(V_j)_{j \in J}$ eine offene Überdeckung von $f(X)$. Dann ist $(f^{-1}(V_j))_{j \in J}$ eine offene Überdeckung von X. Diese enthält eine offene Teilüberdeckung $(f^{-1}(V_{j_k}))_{k=1,\dots,n}$. Dann ist $(V_{j_k})_{k=1,\dots,n}$ eine endliche Teilüberdeckung von $f(X)$. □

Bemerkung 5.14. Für $X = Y = \mathbb{R}$ ist das gerade der Satz, dass eine stetige Funktion auf einer kompakten Menge ihr Maximum annimmt.

Satz 5.15. *Seien $f \colon X \to Y$ eine stetige und bijektive Abbildung topologischer Räume. Sei X quasikompakt und Y separiert. Dann ist f ein Homöomorphismus.*

Beweis. Zu zeigen ist, dass $f(A) \subseteq Y$ abgeschlossen ist, wenn $A \subseteq X$ abgeschlossen ist. Nach Satz 5.12 ist A quasikompakt, also ist nach Satz 5.13 $f(A)$ quasikompakt, und damit nach Satz 5.11 abgeschlossen. □

Lokalkompakte Räume.

SATZ 5.16. *Sei X ein Hausdorffraum. Äquivalent sind:*

(1) *Jeder Punkt $x \in X$ besitzt eine kompakte Umgebung.*
(2) *Jeder Punkt $x \in X$ besitzt eine Umgebungsbasis, die nur aus kompakten Mengen besteht.*

DEFINITION 5.17. Ein Hausdorffraum X heißt *lokalkompakt*, wenn er die Bedingungen aus dem Satz erfüllt.

BEWEIS VON SATZ 5.16. (2)$\Rightarrow$(1) ist klar.

(1)$\Rightarrow$(2) Sei $x \in X$ und K eine kompakte Umgebung von x. Sei V eine beliebige Umgebung von x. Zu zeigen ist, dass eine kompakte Umgebung C von x existiert mit $C \subseteq V$. Ohne Einschränkung gelte $K \subseteq \overline{V}$ (sonst Übergang zu $K \cap \overline{V}$, vgl. 5.11 und 5.12). Sei $\partial V \overset{def}{=} \overline{V} \setminus V^\circ$ der "Rand" von V.

1. Fall: $\partial V \cap K = \emptyset$. Setze $C \overset{def}{=} K$. Dann ist C kompakte Umgebung von x mit $C \subseteq V^\circ \subseteq V$.

2. Fall: $\partial V \cap K \neq \emptyset$. Es ist ∂V abgeschlossen, und da K kompakt ist, ist auch $\partial V \cap K$ kompakt. Zu $y \in \partial V \cap K$ gibt es $U_y \in \mathcal{W}(y) \cap \mathcal{T}$, $W_y \in \mathcal{W}(x) \cap \mathcal{T}$ mit $U_y \cap W_y = \emptyset$. Da $\partial V \cap K$ kompakt ist, gibt es $y_1, \dots, y_n \in \partial V \cap K$ mit $\partial V \cap K \subseteq \cup_{i=1}^n U_{y_k}$. Sei $U \overset{def}{=} \cup_{i=1}^n U_{y_k}$ und $W \overset{def}{=} \cap_{i=1}^n W_{y_k} \cap K$. Dann ist $U \in \mathcal{T}$, W ist eine Umgebung von x mit $U \cap W = \emptyset$ und $x \in W$. Setze $C \overset{def}{=} \overline{W}$. Wegen $W \subseteq K$ gilt $\overline{W} \subseteq \overline{K} = K$, also ist C kompakt. Wegen $x \in W$ ist C eine Umgebung von x. Weiter gilt $C = \overline{W} \subseteq K \subseteq \overline{V}$. Würde $C \nsubseteq V$ gelten, so gäbe es ein $y \in \overline{W} \cap \partial V = \overline{W} \cap (\partial V \cap K)$. Aber U ist eine Umgebung von y mit $U \cap W = \emptyset$, Widerspruch. $\square$

BEMERKUNG 5.18. $\mathbb{K}^N$ ist lokalkompakt.

DEFINITION 5.19. Seien $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum und $A \subseteq X$. Es heißt A *lokalkompakte Teilmenge* von X, wenn $(A, \mathcal{T}_A)$ lokalkompakt ist.

PROPOSITION 5.20. *Seien $(X, \mathcal{T})$ ein Hausdorffraum und $A \subseteq X$. Genau dann ist A lokalkompakt, wenn es zu jedem $a \in A$ eine Umgebung U von a in X gibt, so dass $U \cap A$ kompakt ist.*

BEWEIS. "$\Leftarrow$": $V \cap A$ ist eine kompakte Umgebung von a in $(A, \mathcal{T}_A)$.

"$\Rightarrow$": Sei A lokalkompakt, sei $a \in A$. Dann gibt es eine kompakte Umgebung K' von a in $(A, \mathcal{T}_A)$. Es gibt ein $U' \in \mathcal{T}_A$ mit $a \in U' \subseteq K'$. Es gibt also ein $U \subseteq X$ mit $U \in \mathcal{T}$ und $U' = U \cap A$. Sei $K \overset{def}{=} U \cup K'$. Dann ist K eine Umgebung von a in X und $K \cap A = K'$, also ist $K \cap A$ kompakt. Mit 5.20 folgt, dass $A \cap B$ lokalkompakt ist. $\square$

SATZ 5.21. *Sei X ein Hausdorffraum, und seien A, $B \subseteq X$ lokalkompakt. Dann ist auch $A \cap B$ lokalkompakt.*

BEWEIS. Da $\emptyset$ lokalkompakt ist, können wir $A \cap B \neq \emptyset$ annehmen. Sei $x \in A \cap B$. Dann gibt es nach 5.20 Umgebungen U und V von x in X mit

$U \cap A$ und $V \cap B$ kompakt, also insbesondere abgeschlossen in X, nach 5.11. Dann ist $(U \cap A) \cap (V \cap B)$ in $(U \cap A, \mathcal{T}_{U \cap A})$ abgeschlossen, also kompakt nach 5.12. Es hat also x in die Umgebung $U \cap V$ in X, und $(U \cap V) \cap (A \cap B) = (U \cap A) \cap (V \cap B)$ ist kompakt. □

Satz 5.22. *Sei X ein lokalkompakter Raum, seien A, $U \subseteq X$ mit A abgeschlossen und U offen. Dann sind A, U und $A \cap U$ lokalkompakt.*

Beweis. Nach dem vorherigen Satz ist nur zu zeigen, dass A und U lokalkompakt sind. Die Lokalkompaktheit von U folgt aus 5.16. Es ist auch A lokalkompakt: Sei $a \in A$. Es gibt eine kompakte Umgebung K von a in X. Dann ist $A \cap K$ abgeschlossen, also kompakte Teilmenge von K. In der Spurtopologie ist $A \cap K$ auch eine Umgebung von a. □

Bemerkung 5.23. Es gilt auch die Umkehrung (vgl. Übungen): *Jede lokalkompakte Teilmenge eines lokalkompakten Raumes X ist von der Form $A \cap U$ mit A, $U \subseteq X$, wobei A abgeschlossen und U offen ist.*

Kompaktifizierungen.

Definition 5.24. Sei $f\colon X \to X'$ eine Abbildung zwischen topologischen Räumen. Es heißt f *offen* (bzw. *abgeschlossen*), wenn das Bild jeder offenen (bzw. abgeschlossenen) Menge offenen (bzw. abgeschlossenen) ist.

Proposition 5.25. *seien $(X, \mathcal{T})$ und $(X', \mathcal{T}')$ topologische Räume, sei $f\colon X \to X'$ eine Abbildung. Äquivalent sind:*

(1) *$f\colon (X, \mathcal{T}) \to (f(X), \mathcal{T}'_{f(X)})$ ist ein Homöomorphismus.*
(2) *f ist stetig, injektiv und $f\colon (X, \mathcal{T}) \to (f(X), \mathcal{T}'_{f(X)})$ ist offen.*

Beweis. Man überlegt sich leicht folgende Äquivalenz:

$$f\colon (X, \mathcal{T}) \to (X', \mathcal{T}') \text{ stetig } \Leftrightarrow \ f\colon (X, \mathcal{T}) \to (f(X), \mathcal{T}'_{f(X)}) \text{ stetig.}$$

□

Definition 5.26. Eine Abbildung $f\colon X \to X'$, die diese Bedingungen erfüllt, heißt *Einbettung*.

Definition 5.27. Sei X ein topologischer Raum. Eine *Kompaktifizierung* von X ist ein Paar (X', f), wobei X' ein kompakter topologischer Raum ist und $f\colon X \to X'$ eine Einbettung mit $\overline{f(X)} = X'$.

Beispiel 5.28. (1) $f\colon]0, 1] \to [0, 1]$, $x \mapsto x$.
(2) $f\colon]0, 1[\to [0, 1]$, $x \mapsto x$.
(3) $f\colon]0, 1[\to S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$, $t \mapsto (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t))$.
(4) $f\colon [0, 1] \setminus \mathbb{Q} \to [0, 1]$, $x \mapsto x$.
(5) $f\colon [0, 1] \cap \mathbb{Q} \to [0, 1]$, $x \mapsto x$.
(6) $f\colon \mathbb{R} \to [0, 1]$, $x \mapsto \frac{1}{\pi} \arctan(x) + \frac{1}{2}$.
(7) In der Funktionentheorie wird die komplexe Ebene kompaktifiziert durch Hinzunahme eines Punktes. Sei $S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 +$

$y^2 + z^2 = 1\}$. Die Einbettung $f\colon \mathbb{C} \to S^2$ wird durch die sog. Stereographische Projektion realisiert (vgl. Zeichnung). Man erweitert $\mathbb{C}$ durch Hinzunahme eines Punktes ∞, der dem "Nordpol" N auf der Kugel entspricht.

PROPOSITION 5.29. *Sei X ein topologischer Raum und (X', f) eine Kompaktifizierung, wobei ohne Einschränkung $X' \supseteq X$ gilt und $f = id_X$. Die Komplementmenge $X' \setminus X$ sei endlich. Dann ist X lokalkompakt.*

BEWEIS. Da X' separiert ist, sind einpunktige Teilmengen abgeschlossen. Also ist die endliche $X' \setminus X$ Menge abgeschlossen in X', und damit ist X offen in X'. Nach 5.22 ist X lokalkompakt. □

SATZ 5.30 (Alexandroff). *Sei $(X, \mathcal{T})$ ein lokalkompakter, aber nicht kompakter Raum. Dann gibt es eine Kompaktifizierung (X', f) von X, so dass $X' \setminus f(X)$ genau einen Punkt enthält. Es ist X' bis auf Homöomorphie eindeutig bestimmt.*

BEWEIS. Sei $X' \overset{def}{=} X \cup \{\infty\}$, wobei ∞ (per definionem) ein Element ist, dass nicht in X liegt. Sei $f = id_X$, so dass also $X \subseteq X'$ gilt. Sei $\mathcal{T}'$ (irgend-) eine Topologie auf X', so dass das Paar (X', f) eine Kompaktifizierung von X ist. Setze

$$\mathcal{T}'' \overset{def}{=} \mathcal{T} \cup \{X' \setminus K \mid K \subseteq X \text{ kompakt}\}.$$

(1) $\mathcal{T}' \subseteq \mathcal{T}''$.

Denn sei $U' \in \mathcal{T}'$. Zwei Fälle: (i) $\infty \notin U'$. Es ist die einelementige Menge $\{\infty\}$ abgeschlossen in X' (denn $\mathcal{T}'$ ist separiert). Also ist X offen in X'. Also ist $U' = U' \cap X \in \mathcal{T}$. (ii) $\infty \in U'$. Dann ist $X' \setminus U' \subseteq X$. Es ist $X' \setminus U'$ abgeschlossene Teilmenge von X', also kompakte Teilmenge von X', also kompakte Teilmenge von X.

(2) $\mathcal{T}''$ ist eine Topologie auf X'.

Dies wird in den Übungen bewiesen.

(3) $(X', \mathcal{T}'')$ ist separiert.

Seien x, $y \in X'$, mit $x \neq y$. Sind beide Punkte von ∞ verschieden, so liegen sie in X und können dort durch Elemente aus $\mathcal{T}$ getrennt werden, denn $\mathcal{T}$ ist separiert. Ist etwa $y = \infty$, so gibt es eine kompakte Umgebung K von x in $(X, \mathcal{T})$. Wegen $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{T}''$ ist K auch eine Umgebung von x in $(X', \mathcal{T}'')$. Es ist dann $X' \setminus K \in \mathcal{T}''$ Umgebung von $y = \infty$, und es gilt natürlich $(X' \setminus K) \cap K = \emptyset$.

(4) $(X', \mathcal{T}'')$ ist kompakt.

Sei $(U_i)_{i \in I}$ eine offene Überdeckung von X'. Dann gibt es ein $i_0 \in I$ mit $\infty \in U_{i_0}$. Es gibt dann ein kompaktes $K \subseteq X$ mit $U_{i_0} = X' \setminus K$. Es ist $(U_i)_{i \in I}$ insbesondere auch offene Überdeckung von K. Daher gibt es eine endliche Teilüberdeckung $(U_{i_k})_{k=1,\ldots,n}$ von K. Dann ist offenbar $(U_{i_k})_{k=0,1,\ldots,n}$ eine endliche Teilüberdeckung von X'.

(5) X ist dicht in $(X', \mathcal{T}'')$.

Da X nicht kompakt ist, ist X auch nicht abgeschlossen in X', woraus sofort $\overline{X} = X'$ folgt.

(6) $\mathcal{T}' = \mathcal{T}''$.

Die Identität $id\colon (X', \mathcal{T}'') \to (X', \mathcal{T}')$ ist bijektiv und wegen $\mathcal{T}' \subseteq \mathcal{T}''$ stetig. Da $(X', \mathcal{T}'')$ kompakt ist und $(X', \mathcal{T}')$ separiert, folgt aus Satz 5.15, dass id ein Homöomorphismus ist.

(7) $\mathcal{T}'_X = \mathcal{T}$.

Nach Konstruktion ist "$\supseteq$" klar. Sei $U \in \mathcal{T}'_X$. Dann gibt es ein $U' \in \mathcal{T}'$ mit $U = U' \cap X$. Zwei Fälle: (i) $U' \in \mathcal{T}$. Dann gilt $U = U' \in \mathcal{T}$. (ii) $U' = X' \setminus K$ mit einem kompakten $K \subseteq X$. Dann folgt $U = X \cap (X' \setminus K) = X \cap (X \setminus K) = X \setminus K \in \mathcal{T}$, denn K ist insbesondere abgeschlossen in $(X, \mathcal{T})$. □

Beispiel 5.31. (1) Die Alexandroff-Kompaktifizierung von $\mathbb{R}$ ist S^1.
(2) Die Alexandroff-Kompaktifizierung von $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ ist S^2.

Die kompakt-offene Topologie.

Definition 5.32. Seien X und Y topologische Räume.

(1) Es bezeichne $C(X, Y)$ die Menge aller stetigen Abbildungen $f\colon X \to Y$.
(2) Sei $K \subseteq X$ kompakt und $U \subseteq Y$ offen. Es bezeichne $\Omega(K, U)$ die Menge aller $f \in C(X, Y)$ mit $f(K) \subseteq U$.
(1) (3) Die von der Subbasis
$$\{\Omega(K, U) \mid K \subseteq X \text{ kompakt},\ U \subseteq Y \text{ offen}\}$$
gemäß 4.6 erzeugte Topologie heißt die *kompakt-offene Topologie* auf $C(X, Y)$. Es wird $C(X, Y)$ mit dieser Topologie auch mit $C_{co}(X, Y)$ bezeichnet.
(4) Die auf einen Teilraum von $C_{co}(X, Y)$ induzierte Topologie wird ebenfalls als komapkt-offen bezeichnet.

Proposition 5.33. *Seien X und Y topologische Räume, mit $X \neq \emptyset$. Für $y \in Y$ sei $f_y\colon X \to Y$ die konstante Abbildung mit $f(x) = y$ für alle $x \in X$. Sei $F\colon Y \to \mathcal{C}_{co}(X, Y)$. Dann ist $F\colon Y \to F(Y) \subseteq \mathcal{C}_{co}(X, Y)$ ein Homöomorphismus auf das Bild. (D. h. F ist eine Einbettung.)*

Beweis. F ist offenbar injektiv.
F ist stetig: Sei $\Omega \subseteq \mathcal{C}_{co}$ offen. Nach Definition gilt dann
$$\Omega = \bigcup_{i \in I} \bigcap_{k \in E_i} \Omega(K_i^k, U_i^k)$$
mit einer Indexmenge I, endlichen Indexmengen E_i und $K_i^k \subseteq X$ kompakt, $U_i^k \subseteq Y$ offen. Dann ist
$$F^{-1}(\Omega) = \bigcup_{i \in I} \bigcap_{k \in E_i} F^{-1}(\Omega(K_i^k, U_i^k)) = \bigcup_{i \in I} \bigcap_{k \in E_i} U_i^k,$$
also offen.

$F\colon Y \to F(Y)$ ist offen: Sei $x \in X$ fest. Sei $U \subseteq Y$ offen. Dann ist $F(U) = \Omega(\{x\}, U) \cap F(Y)$, also offen in $F(Y)$. □

SATZ 5.34. *Seien X und Y topologische Räume mit $X \neq \emptyset$. Folgende Aussagen sind äquivalent:*

(1) *Y ist separiert.*
(2) *$\mathcal{C}_{co}(X, Y)$ ist separiert.*

BEWEIS. (2)⇒(1) folgt aus der vorherigen Proposition.

(1)⇒(2) Seien f, $g \in \mathcal{C}_{co}(X, Y)$ mit $f \neq g$. Dann gibt es ein $x \in X$ mit $f(x) \neq g(x)$. Es ist Y separiert, also gibt es U, $V \subseteq Y$ offen mit $U \cap V = \emptyset$, $f(x) \in U$ und $g(x) \in V$. Es folgt $\Omega(\{x\}, U) \cap \Omega(\{x\}, V) = \emptyset$, und offenbar $f \in \Omega(\{x\}, U)$ und $g \in \Omega(\{x\}, U)$. □

6. Zusammenhang

Zusammenhängende Räume.

DEFINITION 6.1. Sei X ein topologischer Raum. Es heißt X *zusammenhängend*, wenn aus $X = U \cup V$ mit offenen und disjunkten U, V stets folgt, dass $U = \emptyset$ oder $V = \emptyset$ gilt.

Ein Teilraum $A \subseteq X$ heißt zusammenhängend, wenn er zusammenhängend in der Spurtopologie ist.

BEISPIEL 6.2. (1) Die leere Menge $\emptyset$ ist zusammenhängend.
(2) Einelementige Mengen sind zusammenhängend.
(3) $\{1, 2\}$ mit der diskreten Topologie ist nicht zusammenhängend.
(4) Das Intervall $[0, 1] \subseteq \mathbb{R}$ ist zusammenhängend: Annahme, es ist $[0, 1] = U \cup V$ mit nichtleere, offenen und disjunkten U, V. Sei $x \overset{de}{=} \sup U$. Es ist U abgeschlossen (in der Topologie von $[0, 1]$, aber auch in der Topologie von $\mathbb{R}$). Es ist also $x \in U$. Zwei Fälle: (i) $x = 1$. Da U offen ist, gibt es ein $\varepsilon > 0$ mit $]1 - \varepsilon, 1] \subseteq U$. Es folgt: $y \overset{def}{=} \sup V \leq 1 - \varepsilon$. Auch V ist offen, also gibt es ein $\delta > 0$ mit $[y, y + \delta[\subseteq V$, Widerspruch zu $y = \sup V$. (ii) $x < 1$. Dann ist $\sup V = 1$, und mann schließt analog.

SATZ 6.3. *Sei X ein topologischer Raum. Seien A, $B \subseteq X$ mit $A \subseteq B \subseteq \overline{A}$. Ist A zusammenhängend, so ist B zusammenhängend. (Insbesondere ist mit A auch $\overline{A}$ zusammenhängend.)*

BEWEIS. Seien U, $V \subseteq X$ offen mit $(B \cap U) \cup (B \cap V) = B$ und mit $(B \cap U) \cap (B \cap V) = \emptyset$. Wegen $A \subseteq B$ gilt dann auch $(A \cap U) \cup (A \cap V) = A$ und $(A \cap U) \cap (A \cap V) = \emptyset$. Also folgt etwa (ohne Einschränkung) $A \cap U = \emptyset$. Dann folgt $\overline{A} \cap U = \emptyset$. Denn andernfalls gäbe es ein $x \in \overline{A} \cap U$. Da U eine Umgebung von x ist und $x \in \overline{A}$, folgt dann aber $U \cap A \neq \emptyset$, Widerspruch. □

SATZ 6.4. *Sei X ein topologischer Raum. Seien $A_i \subseteq X$ $(i \in I)$ zusammenhängende Teilräume mit $\bigcap_{i \in I} A_i \neq \emptyset$. Dann ist $\bigcup_{i \in I} A_i$ zusammenhängend.*

Beweis. Sei $A \overset{def}{=} \bigcup_{i\in I} A_i$. Sei $x \in \bigcap_{i\in I} A_i \subseteq A$. Seien U, $V \subseteq X$ offen mit $(A\cap U)\cup(A\cap V) = A$ und $(A\cap U)\cap(A\cap V) = \emptyset$. Ohne Einschränkung gelte $x \in U$. Für alle $i \in I$ gilt dann $(A_i\cap U)\cup(A_i\cap V) = A_i$ und $(A_i\cap U)\cap(A_i\cap V) = \emptyset$, und es folgt $A_i \cap V = \emptyset$. Dann folgt $A\cap V = \big(\bigcup_{i\in I} A_i\big)\cap V = \bigcup_{i\in I}\big(A_i\cap V\big) = \emptyset$. □

Satz 6.5. *Die zusammenhängenden Teilmengen von $\mathbb{R}$ sind gerade die Intervalle.*

Beweis. $\emptyset =]0, 0[$. Es ist $[0, 1]$ zusammenhängend, und analog $[a, b]$ $(a \leq b)$. Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $x \in I$. Dann ist

$$I = \bigcup_{a,\,b\in I,\ a\leq x\leq b} [a, b].$$

Nach dem vorherigen Satz ist dann I zusammenhängend.

Sei $A \subseteq \mathbb{R}$ kein Intervall. Dann gibt es a, $b \in A$, $c \notin A$ mit $a < c < b$. Dann ist $A = (\,]-\infty, c[\,\cap A)\cup(\,]c, \infty[\,\cap A)$ disjunkte Vereinigung offener Mengen, also nicht zusammenhängend. □

Definition 6.6. Sei X ein topologischer Raum, sei $x \in X$. Die Vereinigung aller zusammenhängenden Teilmengen von X, die x enthalten, heißt *Zusammenhangskomponente* von x in X. Schreibweise $X^{(x)}$.

Satz 6.7. *Sei X ein topologischer Raum, seien x, $y \in X$. Dann gilt*
(1) *$X^{(x)}$ ist die größte zusammenhängende Teilmenge von X, die x enthält.*
(2) *$X^{(x)}$ ist abgeschlossen.*
(3) *$X^{(x)} = X^{(y)}$ oder $X^{(x)} \cap X^{(y)} = \emptyset$, d. h. X ist die disjunkte Vereinigung aller Zusammenhangskomponenten.*

Beweis. (1) folgt aus 6.4.
(2) folgt aus 6.3.
(3) Es gelte $X^{(x)}\cap X^{(y)} \neq \emptyset$. Nach 6.4 ist $X^{(x)}\cup X^{(y)}$ zusammenhängend. Es folgt $X^{(x)}\cup X^{(y)} = X^{(x)}$ und $X^{(x)}\cup X^{(y)} = X^{(y)}$. □

Zusammenhang und Stetigkeit.

Satz 6.8. *Seien X und Y topologische Räume. Sei $f\colon X \to Y$ stetig. Ist $A \subseteq X$ zusammenhängend, so ist $f(A)$ zusammenhängend.*

Beweis. Seien U, $V \subseteq Y$ offen mit $(f(A)\cap U)\cup(f(A)\cap V) = f(A)$ und $(f(A)\cap U)\cap(f(A)\cap V) = \emptyset$. Es sind $U' \overset{def}{=} f^{-1}(U) = f^{-1}(f(A)\cap U))$ und $V' \overset{def}{=} f^{-1}(V) = f^{-1}(f(A)\cap V))$ offen in X und mit $(A\cap U')\cup(A\cap V') = A$ und $(A\cap U')\cap(A\cap V') = \emptyset$. Da A zusammenhängend ist, gilt etwa $A\cap U' = \emptyset$. Es folgt $f(A)\cap U = f(A\cap U') = \emptyset$. □

Bemerkung 6.9. Für $X = Y = \mathbb{R}$ ist dieser Satz gerade der Zwischenwertsatz.

Bogenweiser Zusammenhang.

Definition 6.10. Sei X ein topologischer Raum und $I = [0, 1] \subseteq \mathbb{R}$.

(1) Ein *Weg* (oder *Bogen*) ist eine stetige Abbildung $\gamma\colon I \to X$.
(2) X heißt *wegzusammenhängend* (oder *bogenweise zusammenhängend*, wenn es für alle $x, y \in X$ einen Weg $\gamma\colon I \to X$ gibt mit $\gamma(0) = x$ und $\gamma(1) = y$.

Bemerkung 6.11. Jedes Intervall in $\mathbb{R}$ ist wegzusammenhängend.

Satz 6.12. *Sei X ein wegzusammenhängender topologischer Raum. Dann ist X zusammenhängend.*

Beweis. Wir können $X \neq \emptyset$ annehmen. Sei $x \in X$. Dann ist wegen des Wegzusammenhangs

$$X = \bigcup_{\gamma \text{ Weg}, \ \gamma(0)=x} \gamma(I),$$

also zusammenhängend nach 6.4, 6.5 und 6.8. □

Definition 6.13. Sei X ein topologischer Raum, und sei $x \in X$. Die *Bogenkomponente* von x in X ist definiert als

$$B^{(x)} \overset{def}{=} \{y \in X \mid \exists\, \gamma\colon I \to X \text{ stetig}, \ \gamma(0) = x, \ \gamma(1) = y\}.$$

Satz 6.14. *Sei X ein topologischer Raum, und seien $x, y \in X$. Dann gilt:*

(1) *$B^{(x)}$ ist wegzusammenhängend mit $B^{(x)} \subseteq X^{(x)}$.*
(2) *$B^{(x)} = B^{(y)}$ oder $B^{(x)} \cap B^{(y)} = \emptyset$, d. h. X ist die disjunkte Vereinigung aller Bogenkomponenten.*

Beweis. (1) Seien $u, v \in B^{(x)}$. Dann gibt es $\alpha, \beta\colon I \to X$ stetig mit $\alpha(0) = \beta(0) = x$, $\alpha(1) = u$, $\beta(1) = v$. Setze

$$\gamma(t) \overset{def}{=} \begin{cases} \alpha(1-2t), & 0 \leq t \leq 1/2, \\ \beta(2t-1), & 1/2 \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Offenbar ist $\gamma\colon I \to X$ stetig mit $\gamma(0) = u$ und $\gamma(1) = v$. Also ist $B^{(x)}$ wegzusammenhängend. Da $B^{(x)}$ dann insbesondere zusammenhängend ist, und $x \in B^{(x)}$ gilt, folgt $B^{(x)} \subseteq X^{(x)}$.

(2) Es gelte $B^{(x)} \cap B^{(y)} \neq \emptyset$. Sei $u \in B^{(x)} \cap B^{(y)}$. Sei $v \in B^{(x)}$. Man findet (wie in (1)) einen Weg von y nach u nach x nach v, also $v \in B^{(y)}$. Analog folgt die umgekehrte Inklusion. □

Wegzusammenhang und Stetigkeit.

Satz 6.15. *Seien X und Y topologische Räume. Sei $f\colon X \to Y$ stetig. Ist X wegzusammenhängend, so ist $f(X)$ wegzusammenhängend.*

Beweis. Seien $u = f(x)$, $v = f(y) \in f(X)$. Es gibt einen Weg $\gamma\colon I \to X$ mit $\gamma(0) = x$ und $\gamma(1) = y$. Dann ist $f \circ \gamma$ ein Weg, dessen Bild in $f(X)$ liegt, und mit $f \circ \gamma(0) = u$ und $f \circ \gamma(1) = v$. □

Lokaler Zusammenhang.

DEFINITION 6.16. Ein topologischer Raum X heißt *lokal zusammenhängend* (bzw. *lokal wegzusammenhängend*), falls jeder Punkt $x \in X$ eine Umgebungsbasis aus zusammenhängenden (bzw. wegzusammenhängenden) Mengen besitzt.

BEMERKUNG 6.17.
(1) Aus lokal (weg-) zusammenhängend folgt allgemein weder (weg-) zuammenhängend noch die Umkehrung. (Vgl. Übungen.)
(2) Aus lokal wegzusammenhängend folgt lokal zusammenhängend, aber allgemein nicht die Umkehrung.
(3) Offen Teilmengen von $\mathbb{K}^N$ sind lokal wegzusammenhängend.

SATZ 6.18. *Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum. Äquivalent sind:*
(1) *X ist lokal zusammenhängend.*
(2) *Für alle $U \in \mathcal{T}$ sind die Zusammenhangskomponenten von $(U, \mathcal{T}_U)$ offen.*

"Offen" kann man hier bzgl. $\mathcal{T}_U$ oder $\mathcal{T}$ verstehen. (Vgl. 3.17.) Insbesondere sind die Zusammenhangskomponenten eines lokal zsuammenhängenden Raumes offen.

BEWEIS. (1)⇒(2): Sei $U \in \mathcal{T}$. Sei V eine Zusammenhangskomponente von U bzgl. $\mathcal{T}_U$. Sei $x \in V$. Da X lokal zusammenhängend ist, gibt es eine zusammenhängende Umgebung A von x (bzgl. $\mathcal{T}$) mit $A \subseteq U$. Da A zusammenhängend ist, folgt $A \subseteq V$. Also ist auch V eine Umgebung von x (bzgl. $\mathcal{T}$), und V ist damit offen.

(2)⇒(1): Sei $x \in X$, sei A eine Umgebung von x. Sei U die Zusammenhangskomponente von A° bzgl. $\mathcal{T}_{A^\circ}$, die x enthält. Nach Voraussetzung ist U offen. Also enthält A eine offene, zusammenhängende Menge U mit $x \in U$. □

SATZ 6.19. *Sei $(X, \mathcal{T})$ ein lokal wegzusammenhängender Raum. Dann stimmen die Bogenkomponenten mit den Zusammenhangskomponenten überein, sind also (wegen 6.18) offen. Jeder Punkt von X besitzt eine Umgebungsbasis aus offenen, wegzusammenhängenden Mengen.*

BEWEIS. (1) Die Bogenkomponenten sind offen: Sei $x \in X$. Sei $V = B^{(x)}$. Es gibt eine wegzusammenhängende Umgebung A von x. Also gilt $A \subseteq V$, und damit ist V eine Umgebung von x.

(2) Sei $x \in X$, sei V die Bogenkomponente $B^{(x)}$ von x und $U = X^{(x)}$ die Zusammenhangskomponente. Nach 6.14 gilt $V \subseteq U$. Sei $X = \bigcup_{i \in I} V_i$, wobei V_i die (wegen (1) offenen) (verschiedenen) Bogenkomponenten sind. Es gibt also ein eindeutig bestimmtes $i_0 \in I$ mit $V = V_{i_0}$. Es gilt $U = (U \cap V) \cup (U \cap \bigcup_{i \neq i_0} V_i)$ und $\emptyset = (U \cap V) \cap (U \cap \bigcup_{i \neq i_0} V_i)$. (Dabei ist die erste Klammer nichtleer, die zweite offen.) Weil U zusammenhängend ist, folgt $U \cap V = U$, d. h. $U = V$.

(3) Sei $x \in X$ und U eine offene Umgebung von x. Es gibt eine wegzusammenhängende Umgebung A von x mit $A \subseteq U$. Sei V die Bogenkomponente von x in $(U, \mathcal{T}_U)$. Es gilt $x \in A \subseteq V \subseteq U$, und nach (1) ist V offen in U, also auch offen bzgl. $\mathcal{T}$. Es enthält U also die offene, wegzusammenhängende Umgebung V von x. $\square$

Korollar 6.20. *Sei X ein zusammenhängender und lokal wegzusammenhängender topologischer Raum. Dann ist X wegzusammenhängend.*

Beweis. Nach dem vorherigen Satz stimmen die Bogenkomponenten mit den Zusammenhangskomponenten überein. Es gibt aber nur eine Zusammenhangskomponente. $\square$

Beispiel 6.21. Eine offene und zusammenhängende Teilmenge von $\mathbb{K}^N$ (ein sogenanntes Gebiet) ist wegzusammenhängend, denn sie ist lokal wegzusammenhängend.

7. Initiale Topologien. Die Produkttopologie

Initiale Topologie.

Lemma 7.1. *Seien $(X, \mathcal{T})$ und $(X', \mathcal{T}')$ topologische Räume, es sei $\mathcal{S}'$ eine Subbasis von $\mathcal{T}'$. Sei $f\colon X \to X'$ eine Abbildung. Äquivalent sind:*

(1) *f ist stetig.*
(2) *Für alle $U' \in \mathcal{S}'$ gilt $f^{-1}(U') \in \mathcal{T}$.*

Beweis. (1)⇒(2): klar.
(2)⇒(1): Jedes $U' \in \mathcal{T}'$ ist von der Form

$$U' = \bigcup_{i \in I} \bigcap_{k=1}^{n_i} U'_{i,k}$$

mit allen $U'_{i,k} \in \mathcal{S}'$, wobei I eine Indexmenge ist. Es folgt

$$f^{-1}(U') = \bigcup_{i \in I} \bigcap_{k=1}^{n_i} f^{-1}(U'_{i,k}) \in \mathcal{T}.$$

$\square$

Satz 7.2. *Sei X eine Menge, und seien $(X_i, \mathcal{T}_i)$ für jedes $i \in I$ (wobei I eine Indexmenge ist) topologische Räume und $f_i\colon X \to X_i$ Abbildungen. Sei*

$$\mathcal{S} \overset{\text{def}}{=} \{f_i^{-1}(U_i) \mid i \in I,\ U_i \in \mathcal{T}_i\},$$

und sei $\mathcal{T}$ die von $\mathcal{S}$ erzeugte Topologie auf X, die sogenannte initiale Topologie *auf X bzgl. $(f_i)_{i \in I}$.*

(1) *$\mathcal{T}$ ist die gröbste Topologie auf X derart, dass alle f_i ($i \in I$) stetig sind.*
(2) *Ist $(X', \mathcal{T}')$ ein topologischer Raum und $f\colon X' \to X$ eine Abbildung, so gilt:*

$$f\colon (X', \mathcal{T}') \to (X, \mathcal{T}) \text{ stetig} \quad \Leftrightarrow \quad \forall\, i \in I\colon f_i \circ f\colon (X', \mathcal{T}') \to (X_i, \mathcal{T}_i) \text{ stetig.}$$

Beweis. (1) folgt aus der Definition.

(2) folgt aus 7.1. □

Beispiel 7.3. Sei X eine Menge und $(X', \mathcal{T}')$ ein topologischer Raum, sei $f\colon X \to X'$ eine Abbildung. Die initiale Topologie auf X bzgl. f ist gerade die von $\mathcal{T}'$ bzgl. f induzierte Topologie, vgl. 3.13. Im Spezialfall $X \subseteq X'$ und f die Inklusionsabbildung ist dies also gerade die Spurtopologie.

Die Produkttopologie.

Definition 7.4. (1) Sei $(X_i)_{i\in I}$ eine (nichtleere) Familie von Mengen und

$$X = \prod_{i\in I} X_i = \{(x_i)_{i\in I} \mid \forall\, i \in I\colon x_i \in X_i\}$$

deren *Produkt*. Statt $\prod_{i\in I} Y$ schreibt man auch Y^I; für $I = \{1, \ldots, n\}$ auch Y^n. Für $\prod_{i=1}^2$ auch $X_1 \times X_2$, etc. Für $i \in I$ sei $p_i\colon X \to X_i$ die i-te *Projektion*, d. h. $p_i((x_j)_{j\in I}) = x_i$.

(2) Seien die X_i topologogische Räume ($i \in I$). Die initiale Topologie auf $X = \prod_{i\in I} X_i$ bzgl. $(p_i)_{i\in I}$ heißt *Produkttopologie*.

Wenn nicht anders vereinbart, werden Produkte von topologischen Räumen stets mit dieser Topologie versehen.

Bemerkung 7.5. (1) Das Auswahlaxiom besagt, dass das Produkt von nichtleeren Mengen nichtleer ist. Es ist äquivalent zum Lemma von Zorn. Ist ein $X_i = \emptyset$, so ist $X = \emptyset$.

(2) Ist $X \neq \emptyset$, so sind alle Projektionen p_i surjektiv.

Beispiel 7.6. Seien (X_i, d_i) metrische Räume ($i = 1, \ldots, n$). Für $x = (x_i)$, $y = (y_i) \in \prod_{i=1}^n X_i$ sei

$$d^1(x, y) \overset{def}{=} \sum_{i=1}^n d_i(x_i, y_i)$$

und

$$d^\infty(x, y) \overset{def}{=} \max_{i=1}^n d_i(x_i, y_i).$$

Dann wird die Produkttopologie sowohl von d^1 als auch von d^∞ induziert.

Satz 7.7. *Sei $(X_i)_{i\in I}$ eine Familie von topologischen Räumen, und seien $\emptyset \neq U_i \subseteq X_i$ offen ($i \in I$). Dann sind äquivalent*

(1) *$\prod_{i\in I} U_i$ ist offen in $\prod_{i\in I} X_i$.*

(2) *Die Menge $\{i \in I \mid U_i \neq X_i\}$ ist endlich.*

Beweis. (2)⇒(1): Sei $J \overset{def}{=} \{i \in I \mid U_i \neq X_i\}$ endlich. Dann ist

$$\prod_{i\in I} U_i = \bigcap_{i\in J} p_i^{-1}(U_i),$$

also offen.

(1)⇒(2): $\prod_{i\in I} U_i$ ist nichtleer und wegen (1) offen. Ist $\mathcal{S}$ die Subbasis der Produkttopologie wie in 7.2, so gibt es $S_1, \dots, S_n \in \mathcal{S}$ mit

$$\emptyset \neq \bigcap_{k=1}^{n} S_k \subseteq \prod_{i\in I} U_i;$$

für jedes $k = 1, \dots, n$ ist $S_k = p_{i_k}^{-1}(V_k)$ für ein $i_k \in I$ und eine nichtleeres, offenes $V_k \subseteq X_{i_k}$. Dabei kann man ohne Einschränkung $i_k \neq i_\ell$ für $k \neq \ell$ annehmen (da sonst $p_{i_k}^{-1}(V_k) \cap p_{i_\ell}^{-1}(V_\ell) = p_{i_k}^{-1}(V_k \cap V_\ell)$ gilt). Es folgt also

$$\emptyset \neq \bigcap_{k=1}^{n} p_{i_k}^{-1}(V_k) \subseteq \prod_{i\in I} U_i,$$

und daher ist $\{i \in I \mid U_i \neq X_i\} \subseteq \{i_1, \dots, i_n\}$ endlich. □

Korollar 7.8. *Die offenen Mengen der Form $\prod_{i\in I} U_i$ mit $U_i = X_i$ für fast alle $i \in I$ (U_i offen) bilden eine Basis der Produkttopologie.*

Satz 7.9. *Sei $(X_i)_{i\in I}$ eine Familie von topologischen Räumen, und seien $\emptyset \neq A_i \subseteq X_i$ abgeschlossen ($i \in I$). Dann ist $\prod_{i\in I} A_i$ abgeschlossen in $X = \prod_{i\in I} X_i$.*

Beweis. Für j, $k \in I$ sei

$$B_j^k \overset{def}{=} \begin{cases} X_j & j \neq k, \\ X_j \setminus A_j & j = k. \end{cases}$$

Dann ist

$$X \setminus \prod_{i\in I} A_i = \bigcup_{k\in I} \prod_{j\in I} B_j^k,$$

also offen. □

Lemma 7.10. *Seien $(X, \mathcal{T})$ und $(X', \mathcal{T}')$ topologische Räume. Sei $f\colon X \to X'$ eine Abbildung. Sei $\mathcal{B}$ eine Basis von $\mathcal{T}$. Ist $f(U) \in \mathcal{T}'$ für alle $U \in \mathcal{B}$, so ist f offen.*

Beweis. Man verwendet die Beziehung $f\big(\bigcup_{i\in I} U_i\big) = \bigcup_{i\in I} f(U_i)$. (Da eine entsprechende Beziehung vor Durchschnitte nicht gilt, gilt eine entsprechende Aussage für Subbasen bzw. mit "abgeschlossen" nicht.) □

Satz 7.11. *Für das topologische Produkt $X = \prod_{i\in I} X_i$ sind die Projektionen $p_i\colon X \to X_i$ stetig und offen.*

Beweis. Die Stetigkeit ist klar nach Definition der Produkttopologie. Sei $U \subseteq X$ offen. Dann ist U von der Form

$$U = \bigcup_{s\in S} \prod_{j\in I} U_j^s$$

mit einer Indexmenge S und $U_j^s \subseteq X_j$ offen. Es folgt für jedes $k \in I$, dass $p_k(U) = \bigcup_{s\in S} U_k^s$, also offen ist. □

Bemerkung 7.12. Projektionen sind i. a. nicht abgeschlossen. (Vgl. Übungen.)

Produkträume und Separiertheit.

Definition 7.13. Sei X ein topologischer Raum. Dann heißt

$$\Delta(X) \overset{def}{=} \{(x,x) \in X^2 \mid x \in X\}$$

die *Diagonale* von X^2.

Satz 7.14. *Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum. Äquivalent sind:*

(1) *X ist separiert.*
(2) *$\Delta(X)$ ist abgeschlossen in X^2.*

Beweis. (1)⇒(2): Sei $x = (x_1, x_2) \in X^2 \setminus \Delta(X)$. Dann gilt $x_1 \neq x_2$. Da X separiert ist, gibt es U_1, $U_2 \in \mathcal{T}$ disjunkt mit $x_1 \in U_1$, $x_2 \in U_2$. Es ist $U_1 \times U_2$ offen und $x \in U_1 \times U_2 \subseteq X^2 \setminus \Delta(X)$, also ist $X^2 \setminus \Delta(X)$ offen, d. h. $\Delta(X)$ abgeschlossen.

(2)⇒(1): Sei $X^2 \setminus \Delta(X)$ offen. Seien x, $y \in X$ mit $x \neq y$. Nach Definition der Produkttopologie folgt, dass $X^2 \setminus \Delta(X) = \bigcup_{i \in I} U_i \times V_i$ gilt, für eine Indexmenge I und U_i, $V_i \in \mathcal{T}$. Es gibt also einen Index $i_0 \in I$ mit $(x,y) \in U_{i_0} \times V_{i_0} \subseteq X^2 \setminus \Delta(X)$. Es folgt $x \in U_{i_0}$, $y \in V_{i_0}$, und $U_{i_0} \cap V_{i_0} = \emptyset$. □

Satz 7.15. *Sei $X = \prod_{i \in I} X_i$ ein Produkt topologischer Räume $X_i \neq \emptyset$. Äquivalent sind*

(1) *X ist separiert.*
(2) *Für alle $i \in I$ ist X_i ist separiert.*

Beweis. (1)⇒(2): Sei $k \in I$. Seien x_k, $y_k \in X_k$ mit $x_k \neq y_k$. Für $i \neq k$ seien $x_i = y_i \in X_i$. Setze $x \overset{def}{=} (x_i)_{i \in I}$, $y \overset{def}{=} (y_i)_{i \in I} \in X$. Dann gilt $x \neq y$. Man separiert dann x und y durch offene Mengen der Form $\prod_{i \in I} U_i$ und $\prod_{i \in I} V_i$. Es folgt, dass x_k und y_k durch U_k und V_k separiert werden.

(2)⇒(1): Seien x, $y \in X$ mit $x \neq y$. Dann gibt es ein $k \in I$ mit $x_k \neq y_k$. Es ist X_k separiert, also gibt es U_k, $V_k \subseteq X_k$ offen und disjunkt mit $x_k \in U_k$ und $y_k \in V_k$. Für $i \neq k$ setze $U_i \overset{def}{=} V_i \overset{def}{=} X_i$. Setzte $U \overset{def}{=} \prod_{i \in I} U_i$ und $V \overset{def}{=} \prod_{i \in I} V_i$. Dann sind U, $V \subseteq X$ offen und disjunkt mit $x \in X$ und $y \in Y$. □

Produkträume und Kompaktheit.

Satz 7.16 (Tychonoff). *Sei $X = \prod_{i \in I} X_i$ ein Produkt topologischer Räume $X_i \neq \emptyset$. Äquivalent sind*

(1) *X ist quasikompakt.*
(2) *Für alle $i \in I$ ist X_i ist quasikompakt.*

Beweis. (1)⇒(2): Sei $i \in I$. Da $p_i \colon X \to X_i$ surjektiv und stetig ist, folgt aus der Quasikompakheit von X die von X_i, vgl. 5.13.

(2)⇒(1): Wir zeigen: Jeder Ultrafilter $\mathcal{F}$ auf X konvergiert.

(a) Sei $i \in I$. Dann ist $p_i(\mathcal{F})$ ein Ultrafilter auf X_i: Sei $A \subseteq X_i$. Es gilt $p_i^{-1}(X_i \setminus A) = X \setminus p_i^{-1}(A)$. Da $\mathcal{F}$ ein Ultrafilter ist, folgt $p_i^{-1}(A) \in \mathcal{F}$ oder $X_i \setminus p_i^{-1}(A) \in \mathcal{F}$. Aber dann ist $A \in p_i(\mathcal{F})$ oder $X_i \setminus A \in p_i(\mathcal{F})$.

(b) Als Ultrafilter auf dem quasikompakten Raum X_i konvergiert $p_i(\mathcal{F})$; sei $x_i \in \operatorname{Lim} p_i(\mathcal{F})$. Setze $x \overset{def}{=} (x_i)_{i \in I}$. Behauptung: $x \in \operatorname{Lim} \mathcal{F}$: Sei $U \in \mathcal{W}(x)$. Ohne Einschränkung (durch Übergang zu einer geeigneten Teilmenge) sei U von der Form $U = \prod_{i \in I} U_i$ mit $U_i \subseteq X_i$ offen und $U_i \neq X_i$ nur für $i \in J$ für eine endliche Teilmenge $J \subseteq I$. Sei $i \in I$, und $V^i \overset{def}{=} p_i^{-1}(U_i)$. Wegen $x_i \in \operatorname{Lim} p_i(\mathcal{F})$ gilt $U_i \in p_i(\mathcal{F})$. Da $\mathcal{F}$ ein Ultrafilter ist, gilt $V^i \in \mathcal{F}$ oder $X \setminus V^i \in \mathcal{F}$. Letzteres ist aber nicht möglich wegen $p_i(X \setminus V^i) = X_i \setminus U_i \notin p_i(\mathcal{F})$, also gilt $V^i \in \mathcal{F}$. Es folgt $U = \bigcap_{i \in J} V^i \in \mathcal{F}$. □

Produkträume und Zusammenhang.

Satz 7.17. *Sei $X = \prod_{i \in I} X_i$ ein Produkt topologischer Räume $X_i \neq \emptyset$. Äquivalent sind*

(1) *X ist zusammenhängend.*
(2) *Für alle $i \in I$ ist X_i ist zusammenhängend.*

Beweis. (1)⇒(2): Folgt wegen $p_i(X) = X_i$ aus 6.8.
(2)⇒(1): Entfällt aus Zeitgründen. □

Satz 7.18. *Sei $X = \prod_{i \in I} X_i$ ein Produkt topologischer Räume $X_i \neq \emptyset$. Äquivalent sind*

(1) *X ist wegzusammenhängend.*
(2) *Für alle $i \in I$ ist X_i ist wegzusammenhängend.*

Beweis. (1)⇒(2): Folgt wegen $p_i(X) = X_i$ aus 6.15.
(2)⇒(1): Seien $x = (x_i)$, $y = (y_i) \in X$. Sei $i \in I$. Da X_i wegzusammenhängend ist, gibt es einen Weg $\gamma_i \colon [0, 1] \to X_i$ mit $\gamma_i(0) = x_i$ und $\gamma_i(1) = y_i$. Definiere $\gamma \colon [0, 1] \to X$ durch $\gamma(t) \overset{def}{=} (\gamma_i(t))_{i \in I}$. Dann ist $p_i \circ \gamma = \gamma_i$, also stetig. Aus Satz 7.2 (2) folgt, dass γ stetig ist. □

Satz 7.19. *Sei $X = \prod_{i \in I} X_i$ ein Produkt topologischer Räume $X_i \neq \emptyset$. Äquivalent sind*

(1) *X ist lokalkompakt (lokal zusammenhängend; lokal wegzusammenhängend).*
(2) *Für alle $i \in I$ ist X_i ist lokalkompakt (lokal zusammenhängend; lokal wegzusammenhängend) und für fast alle $i \in I$ ist X_i kompakt (zusammenhängend; wegzusammenhängend).*

Beweis. Entfällt aus Zeitgründen. □

8. Finale Topologien. Die Quotiententopologie

Finale Topologien.

Satz 8.1. *Sei X eine Menge, und seien $(X_i, \mathcal{T}_i)$ für jedes $i \in I$ (wobei I eine Indexmenge ist) topologische Räume und $g_i \colon X_i \to X$ Abbildungen. Sei*

$$\mathcal{T} \overset{def}{=} \{U \subseteq X \mid \forall\, i \in I \colon g_i^{-1}(U) \in \mathcal{T}_i\}.$$

(1) *$\mathcal{T}$ ist die feinste Topologie auf X derart, dass alle g_i ($i \in I$) stetig sind, und heißt die* finale Topologie *auf X vzgl. $(g_i)_{i\in I}$.*
(2) *Ist $(X', \mathcal{T}')$ ein topologischer Raum und $g \colon X \to X'$ eine Abbildung, so gilt:*

$$g \colon (X, \mathcal{T}) \to (X', \mathcal{T}') \text{ stetig} \quad \Leftrightarrow \quad \forall\, i \in I \colon g \circ g_i \colon (X_i, \mathcal{T}_i) \to (X, \mathcal{T}) \text{ stetig.}$$

Beweis. Einfach. □

Definition 8.2. Seien $(X_i, \mathcal{T}_i)$ topologische Räume ($i \in I$). Sei

$$X = \sum_{i\in I} X_i \overset{def}{=} \bigcup_{i\in I} X_i \times \{i\}.$$

Für $i \in I$ sei $g_i \colon X_i \to X$ definiert durch $g_i(x) \overset{def}{=} (x, i)$. Es heißt $X = \sum_{i\in I} X_i$ versehen mit der finalen Topologie bzgl. $(g_i)_{i\in I}$ die *topologische Summe* oder der *Summenraum* der Räume X_i, $i \in I$.

Definition 8.3. Seien $(X, \mathcal{T})$ und $(X', \mathcal{T}')$ topologische Räume und $g \colon X \to X'$. Ist $\mathcal{T}'$ die finale Topologie auf X' bzgl. g, so heißt $\mathcal{T}'$ die *Quotiententopologie* bzw. $(X', \mathcal{T}')$ der *Quotientenraum* bzgl. g, und g auch eine *Quotientenabbildung*.

Beispiel 8.4. Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum und $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf X. Sei $q \colon X \to X/\sim$ die Abbildung, die jedem $x \in X$ seine Äquivalenzklasse $[x]$ bzgl. $\sim$ zuordnet. Dann heißt $M/\sim$ ausgestattet mit der Quotientenabbildung bzgl. q auch der *Quotientenraum* bzgl. der Äquivalenzrelation $\sim$.

Satz 8.5. *Seien $(X, \mathcal{T})$ und $(X', \mathcal{T}')$ topologische Räume und $g \colon X \to X'$ sei stetig, offen und surjektiv. Dann ist g eine Quotientenabbildung.*

Beweis. Sei $\mathcal{T}''$ die Quotiententopologie auf X' bzgl. g. Da g bzgl. $\mathcal{T}'$ stetig ist, folgt nach Definition $\mathcal{T}' \subseteq \mathcal{T}''$. Sei $U'' \in \mathcal{T}''$. Nach Definition gilt $g^{-1}(U'') \in \mathcal{T}$. Da g surjektiv ist, gilt $U'' = g(g^{-1}(U''))$. Da g offen und $g^{-1}(U'') \in \mathcal{T}$ ist, folgt $U'' = g(g^{-1}(U'')) \in \mathcal{T}'$. □

Korollar 8.6. *Ist X quasikompakt (bzw. zusammenhängend, bzw. wegzusammenhängend), so gilt dies auch für $X/\sim$.*

Beweis. Es ist $X/\sim = q(X)$ Bild unter der stetigen Abbildung q. □

Bemerkung 8.7. Ist $X/\sim$ separiert, so müssen alle Äquivalenzklassen $[x]$ abgeschlossen in X sein.

Beweis. Ist $X/\sim$ separiert, so sind alle einpunktige Mengen $\{[x]\} \subseteq X/\sim$ abgeschlossen. Da g stetig ist, sind auch die Urbilder $[x] = q^{-1}(\{[x]\} \subseteq X$ abgeschlossen. □

Beispiele: Orbiträume.

Definition 8.8. (1) Ist G eine Gruppe und zugleich ein topologischer Raum, so heißt G *topologische Gruppe*, wenn die Abbildung $G \times G \to G$, $(a, b) \mapsto ab^{-1}$ stetig ist.

(2) Sei G eine topologische Gruppe und X ein topologischer Raum. Eine *stetige Operation* (oder *Aktion*) von G auf X ist eine stetige Abbildung $G \times X \to X$, $(g, x) \mapsto gx$ mit den Eigenschaften
   (a) $1x = x$ für jedes $x \in X$ (1 das neutrale Element in G)
   (b) $(gh)x = g(hx)$ für alle g, $h \in G$ und alle $x \in X$.

(3) Ein *G-Raum* X ist ein topologischer Raum X zusammen mit einer stetigen Aktion einer topologischen Gruppe G auf X.

(4) Sei X ein G-Raum und $x \in X$. Die Menge $Gx \overset{def}{=} \{gx \mid g \in G\}$ heißt die *Bahn* oder der *Orbit* von x.

Definition 8.9. Sei X ein G-Raum. Zwei Punkte x, $y \in X$ heißen äquivalent, $x \sim_G y$, falls sie dieselbe G-Bahn besitzen, wenn es also ein $g \in G$ gibt mit $y = gx$. Die Äquivalenzklassen sind also genau die G-Bahnen. Den Quotientenraum $X/\sim_G$ der G-Bahnen heißt der *Bahnenraum* oder *Orbitraum* von X und wird mit X/G bezeichnet.

Beispiel 8.10. Sei $X = S^2 \subseteq \mathbb{R}^3$ die 2-Sphäre, sei G die zur $\mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$ isomorphe Untergruppe der $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$, die aus den Drehungen um die z-Achse besteht. Die G-Bahnen sind die Breitenkreise (insbesondere der Äquator) und die beiden Pole auf S^2.

ZEICHNUNG

Dann gilt $S^2/G \simeq [-1, 1]$ (homöomorph).

Beweis. Sei $p_3\colon S^2 \to [-1, 1]$ die Projektion auf die z-Komponente. Dies ist eine stetige Abbildung. Da p_3 konstant auf den G-Bahnen ist, induziert dies eine (wohldefinierte!) Abbildung $f_3\colon S^2/G \to [-1, 1]$, $[x] \mapsto p_3(x)$. Sei $q\colon S^2 \to S^2/G$ die Quotientenabbildung. Dann gilt also $f_3 \circ q = p_3$. Es folgt aus 8.1 (2), dass f_3 stetig ist. Offenbar ist f_3 auch bijektiv. Da S^2/G als stetiges Bild des kompakten Raumes S^2 quasikompakt ist, und da $[-1, 1]$ separiert ist, folgt aus 5.15, dass f_3 ein Homöomorphismus ist.

Definition 8.11. Sei X ein G-Raum, sei $x \in X$. Es heißt

$$\mathrm{St}(x) \overset{def}{=} G_x \overset{def}{=} \{g \in G \mid gx = x\}$$

die *Standuntergruppe* von G.

Proposition 8.12 (Bahnenlemma). *Sei X ein G-Raum, sei $x \in X$. Dann ist $G/\mathrm{St}(x) \xrightarrow{\sim} Gx$, $g\,\mathrm{St}(x) \mapsto gx$ eine stetige Bijektion.*

Beweis. Die Bijektivität (und Wohldefiniertheit) ist einfach. (Siehe auch Vorlesungen über Algebra.) Die Stetigkeit folgt aus 8.1 (2), da die Vorschaltung mit $q\colon G \to G/\mathrm{St}(x)$ gerade die stetige Abbildung $G \to Gx$, $g \mapsto gx$ ergibt. □

Korollar 8.13. *Ist X ein Hausdorffraum und G quasikompakt, so sind $G/\operatorname{St}(x)$ und Gx homöomorph.*

Beweis. Verwende 5.15. □

Beispiele: Zusammenschlagen eines Teilraums zu einem Punkt.

Definition 8.14. Sei X ein topologischer Raum und $A \subseteq X$ eine nichtleere Teilmenge. Für $x, y \in X$ definiere eine Äquivalenzrelation wie folgt:

$$x \sim_A y \quad \overset{def}{\Leftrightarrow} \quad x = y, \text{ oder } x \text{ und } y \text{ liegen beide in } A.$$

Mit X/A bezeichne den Quotientenraum $X/\sim_A$. Man sagt dann, dass X/A durch Zusammenschlagen des Teilraums A zu einem Punkt aus X entsteht.

Beispiel 8.15. ZEICHNUNG: $[0,\,1] \times [0,\,1]/[0,\,1] \times \{1\}$.

Beispiel 8.16 (Kegel über einem Raum). Ist X ein topologischer Raum, so heißt

$$CX \overset{def}{=} X \times [0,1]/X \times 1$$

der *Kegel* über X.
ZEICHNUNG

Definition 8.17. Sei X ein topologischer Raum und $A_1, \dots, A_r \subseteq X$ nichtleere, disjunkte Teilmengen. Für $x, y \in X$ definiere eine Äquivalenzrelation wie folgt:

$$x \sim y \quad \overset{def}{\Leftrightarrow} \quad x = y, \text{ oder } x \text{ und } y \text{ liegen beide im selben } A_i.$$

Mit $X/A_1, \dots, A_r$ bezeichne den Quotientenraum $X/\sim$.

Beispiel 8.18 (Einhängung). Ist X ein topologischer Raum, so heißt

$$\Sigma X \overset{def}{=} X \times [-1,\,1]/X \times -1,\, X \times 1$$

die *Einhängung* oder *Suspension* von X oder der *Doppelkegel* über X.
ZEICHNUNG

Beispiel 8.19. Seien X und Y topologische Räume, seien $x \in X$ und $y \in Y$ (fest). Schreibe ("Wedge")

$$X \vee Y \overset{def}{=} X \times \{y\} \cup \{x\} \times Y$$

und ("Smash")

$$X \wedge Y \overset{def}{=} X \times Y/X \vee Y.$$

Beispiel 8.20. Sei $X = \mathbb{R}^n$. Sei D^n die Vollkugel

$$\overline{K}_1(0) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leq 1\}$$

und $S^{n-1} \subseteq D^n$ den Rand, also die $n-1$-Sphäre

$$S^{n-1}\{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| = 1\}.$$

Was passiert mit D^n beim Zusammenschlagen von S^{n-1} zu einem Punkt? Behauptung: $D^n/S^{n-1} \simeq S^n$. (homöomorph)

Beweis: Bilde eine stetige Abbildung $f\colon D^n \to S^n$, die den Rand S^{n-1} auf den Südpol p und $D^n \setminus S^{n-1}$ bijektiv auf $S^n \setminus \{p\}$ abbildet.

ZEICHNUNG für $n = 2$. (Radien werden auf die halben Großkreise abgebildet, die vom Nordpol zum Südpol verlaufen.)

Dies liefert eine Bijektion $\overline{f}\colon D^n/S^{n-1} \to S^n$ mit $\overline{f} \circ q = f$. Es folgt wieder mit 8.1 (2) und 5.15, dass $\overline{f}$ ein Homöomorphismus ist.

Beispiele: Zusammenkleben von topologischen Räumen.

Definition 8.21. Seien X und Y topologische Räume, sei $X_0 \subseteq X$ ein Teilraum und $\varphi\colon X_0 \to Y$ eine stetige Abbildung. Dann bezeichne mit

$$Y \cup_\varphi X \stackrel{def}{=} X + Y/\sim$$

den Quotientenraum bzgl. der durch $x \sim \varphi(x)$ für alle $x \in X_0$ induzierten Äquivalenzrelation auf $X + Y$. Man sagt, dass $Y \cup_\varphi X$ durch *Anheften* von X an Y mittels der *Anheftungsabbildung* φ entsteht, und sagt auch, dass $Y \cup_\varphi X$ aus $X + Y$ durch *Identifizieren* der Punkte $x \in X_0$ mit ihren Bildpunkten $\varphi(x) \in Y$ entsteht.

Proposition 8.22. *Y ist in kanonischer Weise zu einem Teilraum von $Y \cup_\varphi X$ homöomorph.*

Beweis. Die kanonische Abbildung $Y \subseteq X + Y \to Y \cup_\varphi X$ ist injektiv, denn verschiedene Punkte aus Y werden nicht miteinander identifiziert. Als Verkettung stetiger Abbildungen ist diese Abbildung stetig. Ist $U \subseteq Y$ offen, sie ist U auch offen in $X + Y$, nach Definition der topologischen Summe. Die Äquivalenzklassen der Punkte aus U sind einelementig, und daher ist dann das Bild von U offen in $X + Y/\sim$. □

Beispiel 8.23 (Möbiusband). Sei $X = [0, 1] \times [0, 1]$, sei $Y = [0, 1]$. Sei $X_0 = \{0, 1\} \times [0, 1]$ und $\varphi\colon X_0 \to Y$ definiert durch $\varphi(0, y) = y$ und $\varphi(1, y) = 1 - y$. Dann ist $Y \cup_\varphi X$ homöomorph zum Möbiusband.

9. Vervollständigung metrischer Räume

Definition 9.1 (Cauchy-Folge). Sei (X, d) ein metrischer Raum. Eine Folge (x_n) in X heißt *Cauchyfolge*, falls es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N = N(\epsilon) \in \mathbb{N}$ gibt, so dass $d(x_n, x_m) < \varepsilon$ gilt für alle $n, m \geq N$.

Proposition 9.2. *Jede konvergente Folge in einem metrischen Raum ist eine Cauchyfolge.*

Beweis. Sei $x = \lim_{n\to\infty} x_n$. Sei $\varepsilon > 0$. Dann gibt es ein $N \in \mathbb{N}$ mit $d(x, x_n) < \varepsilon/2$ für alle $n \geq N$. Dann gilt für alle $n, m \geq N$ wegen der Dreiecksungleichung

$$d(x_n, x_m) \leq d(x_n, x) + d(x, x_m) < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon.$$

□

Die Umkehrung gilt i. a. nicht.

Definition 9.3. Ein metrischer Raum X heißt *vollständig*, wenn jede Cauchyfolge in X konvergiert.

Beispiel 9.4. (1) Die reellen Zahlen mit der üblichen Metrik $d(x,y) = |x-y|$ ist vollständig. Dies folgt dann auch für $\mathbb{R}^N$.
(2) $\mathbb{Q}$ (mit der induzierten Metrik) ist nicht vollständig. Dies folgt etwa aus dem folgenden Satz.

Satz 9.5. *Sei (X,d) ein metrischer Raum und $A \subseteq X$ ein Teilraum.*
(1) *Ist A vollständig, so ist A abgeschlossen in X.*
(2) *Ist X vollständig und A abgeschlossen, so ist A vollständig.*

Beweis. (1) Sei $x \in \overline{A}$. Da für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt, dass $K_{1/n}(x) \cap A \neq \emptyset$ ist, gibt es eine Folge (x_n) in A, die in X gegen x konvergiert. Das Beweisargument von Proposition 9.2 zeigt, dass (x_n) eine Cauchyfolge in A ist, dort also konvergiert, etwa gegen $y \in A$. Dies ist aber auch ein Grenzwert der Folge (x_n) in X, also muss (Separiertheit!) $x = y \in A$ gelten.

(2) Sei (x_n) eine Cauchyfolge in A (also insbesondere in X). Nach Annahme konvergiert so gegen ein $x \in X$. Da A abgeschlossen ist, folgt dann aber $x \in A$. □

Definition 9.6. Seien (X,d) und (X',d') metrische Räume. Eine Abbildung $f\colon X \to$ heißt *Isometrie*, falls für alle x, $y \in X$ gilt $d'(f(x), f(y)) = d(x,y)$. (Es ist dann f automatisch stetig und injektiv.) Die metrischen Räume (X,d) und (X',d') heißen *isometrisch*, falls es eine bijektive Isometrie zwischen ihnen gibt. (Dies ist insbesondere ein Homöomorphismus.)

Satz 9.7. *Sei (X,d) ein metrischer Raum. Dann gibt es einen vollständigen metrischen Raum $(\widehat{X}, \bar{d})$ und eine Isometrie $f\colon X \to \widehat{X}$ mit $\overline{f(X)} = \widehat{X}$. Jeder andere metrische Raum mit dieser Eigenschaft ist isometrisch zu $\widehat{X}$.*

Definition 9.8. $(\widehat{X}, \bar{d})$ heißt die *Vervollständigung* von (X,d).

Bemerkung 9.9. $\mathbb{R}$ ist die Vervollständigung von $\mathbb{Q}$. Man kann $\mathbb{R}$ aber so nicht definieren, weil man ohne $\mathbb{R}$ auch nicht sagen kann, was ein metrischer Raum ist.

Beweis des Satzes. (1) Zwei Cauchyfolgen (x_n) und (y_n) in X heißen äquivalent, wenn $\lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n) = 0$ gilt. Es ist offensichtlich, dass es sich dabei um eine Äquivalenzrelation handelt. Sei $\widehat{X}$ die Menge aller Äquivalenzklassen $[(x_n)]$ von Cauchyfolgen (x_n) in X. Definiere $\widehat{d}$ wie folgt: Ist $x = [(x_n)]$ und $y = [(y_n)]$, so sei

$$\widehat{d}(x,y) \stackrel{def}{=} \lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n).$$

(2) Behauptung: Der Limes existiert. Beweis: Es gilt

$$\begin{aligned} |d(x_n,y_n) - d(x_m,y_m)| &\leq |d(x_n,y_n) - d(x_n,y_m)| + |d(x_n,y_m) - d(x_m,y_m)| \\ &\leq d(y_n,y_m) + d(x_n,x_m), \end{aligned}$$

also ist $(d(x_n, y_n))$ eine Cauchyfolge in $\mathbb{R}$, also konvergent.

(3) Behauptung: Der Grenzwert hängt nicht von der Auswahl der Repräsentanten ab. Beweis: Sei $[(x_n)] = [(x'_n)]$. Dann

$$|d(x_n, y_n) - d(x'_n, y_n)| \leq d(x_n, x'_n) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Es folgt $\lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n) = \lim_{n\to\infty} d(x'_n, y_n)$.

(4) Behauptung: $\widehat{d}$ ist eine Metrik. Beweis: Offenbar gilt immer $\widehat{d}(x, y) \geq 0$, und $\widehat{d}(x, y) = 0$ genau dann, wenn $x = y$ folgt nach Definition der Äquivalenz, also (M1). Die Symmetrie (M2) ist klar, die Dreiecksungleichung (M3) ergibt sich aus der für d.

(5) Behauptung: $(\widehat{X}, \widehat{d})$ ist vollständig. Beweis: Sei

$$(x^k)_{k\in\mathbb{N}} = \big([(x^k_n)_{n\in\mathbb{N}}]\big)_{k\in\mathbb{N}}$$

eine Cauchyfolge in $\widehat{X}$. Für jedes $k \in \mathbb{N}$ wähle $N_k \geq k$, so dass

$$d(x^k_n, x^k_m) < 1/k$$

gilt für alle n, $m \geq N_k$. Dabei kann man ohne Einschränkung $N_{k+1} \geq N_k$ für alle k annehmen.

(i) Behauptung: $(x^k_{N_k})_{k\in\mathbb{N}}$ ist eine Cauchyfolge. Beweis: Sei $\varepsilon > 0$. Es gibt ein $n_1 \in \mathbb{N}$ mit $\widehat{d}(x^k, x^\ell) < \varepsilon/4$ für alle k, $\ell \geq n_1$. Es gibt ein $n_2 \in \mathbb{N}$ mit $1/n_2 < \varepsilon/4$. Sei $n_3 = n_3(\varepsilon) = \max\{n_1,\, n_2\}$, und seien k, ℓ mit $\ell \geq k \geq n_1$. Zu k und ℓ existiert ein $m_1 \in \mathbb{N}$, so dass

$$|\widehat{d}(x^k, x^\ell) - d(x^k_m, x^\ell_m)| < \varepsilon/4$$

für alle $m \geq m_1$ gilt. Sei $m_2 \overset{def}{=} \max\{m_1,\, N_\ell\}$. Dann gilt

$$\begin{aligned} d(x^k_{N_k}, x^\ell_{N_\ell}) &\leq d(x^k_{N_k}, x^k_{m_2}) + d(x^k_{m_2}, x^\ell_{m_2}) + d(x^\ell_{m_2}, x^\ell_{N_\ell}) \\ &< 1/k + (\varepsilon/4 + \widehat{d}(x^k, x^\ell)) + 1/\ell \\ &< \varepsilon/4 + (\varepsilon/4 + \varepsilon/4) + \varepsilon/4 = \varepsilon. \end{aligned}$$

Sei $x \overset{def}{=} [(x^k_{N_k})_{k\in\mathbb{N}}]$.

(ii) Behauptung: $\lim_{k\to\infty} x^k = x$. Beweis: Es ist

$$\widehat{d}(x^k, x) = \lim_{r\to\infty} d(x^k_r, x^r_{N_r}).$$

Sei $\varepsilon > 0$ und $k_1 \in \mathbb{N}$ mit $1/k_1 < \varepsilon/2$. Sei $k \geq \max\{k_1,\, n_3(\varepsilon/2)\}$, mit n_3 wie in der Behauptung vorher. Sei $r \overset{def}{\geq} N_k \geq k$. Dann gilt

$$\begin{aligned} d(x^k_r, x^r_{N_r}) &\leq d(x^k_r, x^k_{N_k}) + d(x^k_{N_k}, x^r_{N_r}) \\ &< 1/k + \varepsilon/2 < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon. \end{aligned}$$

Es folgt $\widehat{d}(x^k, x) \leq \varepsilon$.

(6) Für $x \in X$ sei $f(x) \overset{def}{=} [(x)_{n\in\mathbb{N}}]$ die Äquivalenzklasse der konstanten Cauchyfolge $x_n = x$. Nach Definition ist klar, dass $f\colon (X, d) \to (\widehat{X}, \widehat{d})$ eine Isometrie ist.

(7) Behauptung: $\overline{f(X)} = \widehat{X}$. Beweis: Sei $x = [(x_n)_{n\in\mathbb{N}}] \in \widehat{X}$. Dann gilt

$$\widehat{d}(f(x_n), x) = \lim_{r\to\infty} d(x_n, x_r) \leq \sup_{r\geq n} d(x_n, x_r) \xrightarrow{n\to\infty} 0,$$

also $x = \lim_{n\to\infty} f(x_n)$, also $x \in \overline{f(X)}$.

(8) Sei (X', d') ein vollständiger metrischer Raum und $f'\colon X \to X'$ eine Isometrie mit $\overline{f'(X)} = X'$. Behauptung: Es gibt eine bijektive Isometrie $g\colon \widehat{X} \to X'$ mit $g \circ f = f'$. Beweis:

Zunächst definiere $h\colon f(X) \to f'(X)$ durch $h(x) \overset{def}{=} f'(f^{-1}(x))$. ($f$ ist injektiv!). Dies ist offenbar eine bijektive Isometrie auf den Teilräumen. Setze h fort zu einer Abbildung $\widehat{h}\colon \widehat{X} \to X'$: Sei $x \in \widehat{X}$. Es gibt eine Folge (x_n) in $f(X)$ mit $x = \lim_{n\to\infty} x_n$. Als konvergente Folge ist (x_n) eine Cauchyfolge. Dann ist auch $h(x_n)$ eine Cauchyfolge. Sei $\widehat{h}(x) \overset{def}{=} \lim_{n\to\infty} h(x_n)$. Man sieht, dass diese Definition unabhängig von der gewählten Folge (x_n) in $f(X)$ ist. Ferner sieht man ein, dass $\widehat{h}\colon \widehat{X} \to X'$ eine surjektive Isometrie mit $\widehat{h}\circ f = f'$ ist. □

Bemerkung 9.10. Auf der Menge $C([0, 1])$ der stetigen Funktionen $f\colon [0, 1] \to \mathbb{R}$ betrachte die folgende Metrik:

$$d(f, g) = \int_0^1 |f(x) - g(x)|\, dx.$$

Wenn man diesen Raum vervollständigt, bekommt man gerade die Lebesgue-integrierbaren Funktionen auf [0, 1]. Um dies zu zeigen benötigt man einige Arbeit.

10. Konstruktionen stetiger Funktionen

Grundaufgabe für die Konstruktion stetiger Funktionen.

10.1. Eine Grundaufgabe für die Konstruktion stetiger Funktionen ist die folgende: *Sei X ein topologischer Raum. Seien A, $B \subseteq X$ disjunkte abgeschlossene Teilmengen. Man finde eine stetige Funktion $f\colon X \to [0, 1]$ mit $f|_A \equiv 1$ und $f|_B \equiv 0$.*

Bemerkung 10.2. (1) Das Problem 10.1 ist für beliebige disjunkte Teilmengen A, $B \subseteq X$ genau dann lösbar, wenn es für $\overline{A}$ und $\overline{B}$ lösbar ist. Daher betrachtet man von vornherein nur abgeschlossene Mengen. (vgl. Übung)

(2) Ist die Aufgabe 10.1 lösbar, so müssen A und B *durch offene Umgebungen trennbar sein*, d. h. es gibt disjunkte offene Mengen U und V mit $A \subseteq U$ und $B \subseteq V$. (vgl. Übung)

(3) Einen topologischer Raum X, in dem disjunkte abgeschlossene Teilmengen immer durch offene Umgebungen trennbar sind, nennt man auch einen T_4-Raum. Diese Eigenschaft ist ein sog. Trennungsaxiom. Auch die Hausdorffeigenschaft (Separiertheit) ist ein Trennungsaxiom; separierte Räume

nennt man auch T_2-Räume. Es gibbt viele weitere Trennungsaxiome. Wir verweise dazu auf die Literatur.

Das Lemma von Urysohn.

Satz 10.3 (Lemma von Urysohn). *Sei X ein topologischer Raum, in dem disjunkte abgeschlossene Mengen durch offene Umgebungen trennbar sind. Dann gibt es zu disjunkten abgeschlossenen Teilmengen A, $B \subseteq X$ stets eine stetige Funktion $f\colon X \to [0,\,1]$ mit $f|_A \equiv 1$ und $f|_B \equiv 0$.*

Beweis. Seien A und B disjunkte abgeschlossene Teilmengen von X. Eine aufsteigende Kette $\mathcal{K}$ von Teilmengen A_0, A_1, …, A_r von X heiße *zulässig*, wenn

$$A = A_0 \subseteq A_1 \subseteq \cdots \subseteq A_r \subseteq X \setminus B$$

gilt, und wenn stets

$$\overline{A}_{i-1} \subseteq A_i^\circ$$

gilt ($i = 1, \ldots, r$). Die Funktion $\tau = \tau_{\mathcal{K}}\colon X \to [0,\,1]$ mit

$$\tau|_{A_0} \equiv 1,\ \tau|_{A_i \setminus A_{i-1}} \equiv 1 - i/r,\ \tau|_{X \setminus A_r} \equiv 0$$

heiße die *gleichmäßige Treppenfunktion* der Kette $\mathcal{K}$. Formal setze noch $A_{-1} \overset{def}{=} \emptyset$ und $A_{r+1} \overset{def}{=} X$. Für jedes $i = 0, \ldots, r$ heiße die offene Menge $A_{i+1}^\circ \setminus \overline{A}_{i-1}$ der i-te *Stufenbereich*. Diese überdecken X, denn $\overline{A}_i \setminus \overline{A}_{i-1} \subseteq A_{i+1}^\circ \setminus \overline{A}_{i-1}$. In jedem Stufenbereich schwankt die Treppenfunktion τ höchstens um den Wert $1/r$.

Unter einer *Verfeinerung* der zulässigen Kette $\mathcal{K} = (A_0, A_1, \ldots, A_r)$ verstehen wir eine zulässige Kette der Form $(A_0, A_1', A_1, \ldots, A_r', A_r)$.

Behauptung: Jede zulässige Kette lässt sich verfeinern. Dazu genügt es, die folgende Aussage zu beweisen:

Sind in X je zwei disjunkte abgeschlossene Telmengen durch offene Umgebungen trennbar, so gibt es zu je zwei Teilmengen M, N mit $\overline{M} \subseteq N^\circ$ eine dritte Teilmenge L mit $\overline{M} \subseteq L^\circ \subseteq \overline{L} \subseteq N^\circ$.

Beweis: Trenne die disjunkten abgeschlossenen Mengen $A \overset{def}{=} \overline{M}$ und $B \overset{def}{=} X \setminus N^\circ$ durch offene Umgebungen U und V und setze $L \overset{def}{=} U$. —

Sei nun $\mathcal{K}_0$ die zulässige Kette $(A, X \setminus B)$, und für jedes $n = 1,\, 2,\, \ldots$ sei $\mathcal{K}_n$ eine Verfeinerung von $\mathcal{K}_{n-1}$. Sei $f_n \overset{def}{=} \tau_{\mathcal{K}_n}$ die gleichmäßige Treppenfunktion von $\mathcal{K}_n$.

Die Funktionenfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist punktweise monoton wachsend und nach oben beschränkt durch den Wert 1. Sie ist also insbesondere punktweise konvergent. Definiere $f\colon X \to [0,\,1]$ durch

$$f(x) \overset{def}{=} \lim_{n\to\infty} f_n(x)$$

für jedes $x \in X$. Dann gilt offenbar $f|_A \equiv 1$ und $f|_B \equiv 0$.

Es ist noch die Stetigkeit von f zu zeigen. Es gilt stets

$$|f(x) - f_n(x)| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} 1/2^k = 1/2^n,$$

und da f_n auf einem Stufenbereich von $\mathcal{K}_n$ um nicht mehr als $1/2^n$ schwankt, kann f selbst dort um nicht mehr als $1/2^{n-1}$ schwanken. Ist nun $x \in X$ und $\varepsilon > 0$, so wird für $1/2^{n-1} < \varepsilon$ der ganze x enthaltende (offene!) Stufenbereich von $\mathcal{K}_n$ nach $]\, f(x) - \varepsilon,\ f(x) + \varepsilon\, [$ abgebildet. Also ist f stetig. □

Der Fortsetzungssatz von Tietze.

Lemma 10.4. *Sei X ein topologischer Raum, in dem disjunkte abgeschlossene Mengen durch offene Umgebungen trennbar sind. Ist $A \subseteq X$ abgeschlossen und $f\colon A \to [0,\, 1]$ stetig, so gibt es eine Folge $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ stetiger Funktionen $g_n\colon X \to \mathbb{R}$ mit folgenden Eigenschaften:*

(i) $|g_n(x)| \leq 1 - (2/3)^n$ *für alle* $x \in X$.
(ii) $|f(a) - g_n(a)| \leq (2/3)^n$ *für alle* $a \in A$.
(iii) $|g_{n+1}(x) - g_n(x)| \leq 1/3 \cdot (2/3)^n$ *für alle* $x \in X$.
(iv) $|g_n(x) - g_m(x)| \leq (2/3)^p$ *für alle* $x \in X$, $n, m \geq p$.

Beweis. Per Induktion nach n. Setze $g_0 \overset{def}{=} 0$. Dies erfüllt (i) und (ii). Seien $g_0, g_1, \ldots, g_n$ bereits definierte stetige Funktionen, die (i)–(iii) erfüllen. Sei

$$B_{n+1} \overset{def}{=} \left\{ a \in A \mid f(a) - g_n(a) \geq \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^n \right\}$$

und $C_{n+1} \overset{def}{=} \left\{ a \in A \mid f(a) - g_n(a) \leq -\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^n \right\}$. Dies sind disjunkte abgeschlossene Teilmengen von X. Aus dem Lemma von Urysohn folgt, dass es eine stetige Funktion $h_n\colon X \to [-\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^n,\ \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^n]$ gibt mit $h_n|_{B_{n+1}} \equiv -\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^n$ und $h_n|_{C_{n+1}} \equiv \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^n$. Setze $g_{+1} \overset{def}{=} g_n + h_n$. Dann erfüllt $(g_0, g_1, \ldots, g_{n+1})$ die Bedingungen (i)–(iii), und g_{n+1} ist stetig.

(iv) zeigt man wie folgt: Seien $m > n \geq p$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
|g_n(x) - g_m(x)| &= |\sum_{j=1}^{m-n} g_{n+j}(x) - g_{n+j-1}(x)| \\
&\overset{(iii)}{\leq} \sum_{j=1}^{m-n} \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{n+j-1} \leq \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{n+j-1} \\
&= \left(\frac{2}{3}\right)^n \leq \left(\frac{2}{3}\right)^p.
\end{aligned}$$

□

Satz 10.5 (Fortsetzungssatz von Tietze). *Sei X ein topologischer Raum, in dem disjunkte abgeschlossene Mengen durch offene Umgebungen trennbar sind. Ist $A \subseteq X$ abgeschlossen, $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $f\colon A \to I$ stetig, so gibt es eine stetige Fortsetzung $F\colon X \to I$ (also mit $F|_A = f$).*

Beweis. 1. Fall: $I = [0,1]$. Da $[0,1]$ homöomorph zu $[-1,1]$ ist, genügt es, die Aussage stattdessen für $I = [-1,1]$ zu zeigen. Sei $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge stetiger Funktionen aus dem vorherigen Lemma. Aus (iv) folgt, dass die Folge punktweise konvergiert. Für jedes $x \in X$ sei $F(x) \overset{def}{=} \lim_{n\to\infty} g_n(x) \in [0,1]$. Es folgt leicht, dass F stetig ist (gleichmäßiger Limes stetiger Funktionen). Aus (i) folgt $F(X) \subseteq [-1,1]$, aus (ii) folgt $F|_A = f$.

2. Fall: $I = [0,1[$. Es gilt $f(A) \subseteq [0,1[\subseteq [0,1]$. Aus dem 1. Fall folgt, dass es eine stetige Funktion $\widetilde{F}\colon X \to [0,1]$ gibt mit $\widetilde{F}|_A = f$. Sei $B \overset{def}{=} \widetilde{F}^{-1}\{1\}$. Dann gilt: B ist abgeschlossen mit $A\cap B = \emptyset$. Sei $h\colon X \to [0,1]$ eine Funktion aus dem Lemma von Urysohn, also mit $h|_A \equiv 1$, $h|_B \equiv 0$. Setze $F \overset{def}{=} h \cdot \widetilde{F}$. Dann ist $F\colon X \to [0,1[$ stetig mit $F|_A = f$.

3. Fall: $I =]0,1[$. Analog zum 2. Fall.

4. Fall: I beliebig. Dann ist I homöomorph zu einem der drei Intervalle $[0,1]$, $[0,1[$ oder $]0,1[$. Die Behauptung folgt dann aus den ersten drei Fällen. □

Die Stone-Čech-Kompaktifizierung. Der folgende Satz gilt etwas allgemeiner. Aus Zeitgründen verzichten wir auf volle Allgemeinheit und beweisen nur einen Teil.

Satz 10.6. *Sei X ein topologischer Raum, in dem einpunkte Mengen abgeschlossen sind, und in dem sich disjunkte abgeschlossene Teilmengen stets durch offene Umgebungen trennen lassen. Dann existiert eine Kompaktifizierung $(\beta X, \beta)$ (d. h. βX ist ein kompakter topologischer Raum, $\beta\colon X \to \beta X$ eine Einbettung mit $\overline{\beta(X)} = \beta X$) mit folgender universellen Eigenschaft: Ist Y ein kompakter topologischer Raum und $f\colon X \to Y$ stetig, so gibt es genau eine stetige Abbildung $f'\colon \beta X \to Y$ mit $f = f' \circ \beta$.*

Dadurch ist βX bis auf Homöomorphie durch X bestimmt und heißt die Stone-Čech-Kompaktifizierung von X.

Beweisskizze, nur Existenz. Sei $\Phi \overset{def}{=} C([0,1])$. Nach dem Satz von Tychonoff ist $[0,1]^\Phi = \prod_{\varphi\in\Phi}[0,1]$ kompakt. Definiere $\beta\colon X \to [0,1]^\Phi$ durch $\beta(x) \overset{def}{=} (\varphi(x))_{\varphi\in\Phi}$. Dann ist $\beta X \overset{def}{=} \overline{\beta(X)}$ kompakt, und trivialerweise liegt $\beta(X)$ darin dicht. Zu zeigen ist, dass β eine Einbettung ist.

β ist injektiv: Seien x, $y \in X$, mit $x \neq y$. Da $\{x\}$ und $\{y\}$ abgeschlossen sind, gibt es nach dem Lemma von Urysohn eine stetige Funktion $\varphi\colon X \to [0,1]$ mit $\varphi(x) = 0$ und $\varphi(y) = 1$. Es folgt $\beta(x) \neq \beta(y)$.

β ist stetig: Sei $\varphi \in \Phi$. Es genügt zu zeigen, dass $p_\varphi \circ \beta$ stetig ist. Aber wegen $p_\varphi \circ \beta = \varphi$ ist dies trivial.

$\beta\colon X \to \beta(X)$ ist offen: Sei $U \subseteq X$ offen. Zu $x \in U$ gibt es (Lemma von Urysohn) $\psi_x\colon X \to [0,1]$ stetig mit $\psi_x(x) = 0$ und $\psi_x|_{X\setminus U} \equiv 1$. Es folgt, dass $U_x \overset{def}{=} \psi_x^{-1}([0,1[)$ offene Umgebung von x ist mit $U_x \subseteq U$ und $U = \bigcup_{x\in U} U_x$.

Also ist $\beta(U) = \bigcup_{x \in U} \beta(U_x)$. Jedes $\beta(U_x)$ ist offen in $\beta(X)$: Es ist

$$\begin{aligned} U_x &= \psi_x^{-1}([0,1\,[) = (p_{\psi_x} \circ \beta)^{-1}([0,1\,[) \\ &= \beta^{-1}\big(p_{\psi_x}^{-1}([0,1\,[)\big). \end{aligned}$$

Es folgt $\beta(U_x) = p_{\psi_x}^{-1}([0,1\,[) \cap \beta(X)$ offen in $\beta(X)$. □

Bemerkung 10.7. Ein Raum X mit den Voraussetzungen des Satzes heißt auch *normal* (T_1 und T_4). Der Satz gilt allgemeiner (und genau dann), wenn X ein sog. *vollständiger regulärer* Raum ist (T_1 und $T_{3\frac{1}{2}}$). Es ist dann per Definition so, dass man das Lemma von Urysohn gerade in den speziellen Fällen anwenden kann, wie sie im Beweis auftreten. Der Beweis ändert sich also nicht.

KAPITEL 2

Algebraische Topologie

1. Homotopie

Homotope Abbildungen.

Definition 1.1. Seien X und Y topologische Räume. Stetige Abbildungen $f_0,\ f_1\colon X \to Y$ heißen *homotop*, wenn es eine *Homotopie* H zwischen ihnen gibt, d. h. eine stetige Abbildung $H\colon X \times [0,1] \to Y$ mit $H(x,0) = f_0(x)$ und $H(x,1) = f_1(x)$ für alle $x \in X$.

Man schreibt dann auch $f_0 \simeq f_1$, oder genauer $f_0 \overset{H}{\simeq} f_1$. Für festes $t \in [0,1]$ schreibt man auch $H_t\colon X \to Y$, wobei $H_t(x) = H(x,t)$ für alle $x \in X$. Insbesondere gilt also $H_0 = f_0$ und $H_1 = f_1$.

Man stellt sich $[0,1]$ als Zeitintervall vor. Zum Startzeitpunkt $t = 0$ hat man die stetige Abbildung f_0, die dann mit der Zeit *stetig deformiert* wird, bis man zum Endzeitpunkt $t = 1$ die stetige Abbildung f_1 erhält.
ZEICHNUNG

Proposition 1.2. *Homotopie zwischen stetigen Abbildungen $f_0,\ f_1\colon X \to Y$ ist eine Äquivalenzrelation.*

Beweis. $f \simeq f$: Setze $H(x,t) \overset{def}{=} f(x)$ für alle $x \in X$ und alle $t \in [0,1]$. Dann gilt $f \overset{H}{\simeq} f$.

$f_0 \simeq f_1 \ \Rightarrow\ f_1 \simeq f_0$: Ist $f_0 \overset{H}{\simeq} f_1$, so setze $H'(x,t) \overset{def}{=} H(x, 1-t)$ für alle $x \in X$ und alle $t \in [0,1]$. Dann gilt $f_1 \overset{H'}{\simeq} f_0$.

$f_0 \simeq f_1,\ f_1 \simeq f_2 \ \Rightarrow\ f_0 \simeq f_2$: Gelte $f_0 \overset{H_1}{\simeq} f_1$ und $f_1 \overset{H_2}{\simeq} f_2$. Setze für alle $x \in X$

$$H(x,t) \overset{def}{=} \begin{cases} H_1(x,2t) & 0 \leq t \leq 1/2, \\ H_2(x, 2(t-1/2)) & 1/2 \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Es ist dann $H\colon X \times [0,1] \to Y$ stetig mit $f_0 \overset{H}{\simeq} f_2$. □

Proposition 1.3. *Seien X, Y und Z topologische Räume. Seien $f_0,\ f_1\colon X \to Y$ homotop sowie $g_0,\ g_1\colon Y \to Z$ homotop. Dann sind auch $g_0 \circ f_0$ und $g_1 \circ f_1$ homotop.*

Beweis. Sei $f_0 \overset{F}{\simeq} f_1$ und $g_0 \overset{G}{\simeq} g_1$.
(a) Es gilt $(g_0 \circ F)_0 = g_0 \circ F_0 = g_0 \circ f_0$ und $(g_0 \circ F)_1 = g_0 \circ F_1 = g_0 \circ f_1$. Es ist also $g_0 \circ F\colon X \times [0,1] \to Z$ eine Homotopie von $g_0 \circ f_0$ nach $g_0 \circ f_1$.

(b) Sei $\Phi\colon X \times [0,1] \to Y \times [0,1]$ definiert durch $\Phi(x,t) \overset{def}{=} (f_1(x),t)$ für alle $x \in X$ und alle $t \in [0,1]$. Dies ist eine stetige Abbildung (vgl. Übungen). Es ist $(G \circ \Phi)_0 = G_0 \circ f_1 = g_0 \circ f_1$ und $(G \circ \Phi)_1 = G_1 \circ f_1 = g_1 \circ f_1$. Es ist also $G \circ \Phi$ eine Homotopie von $g_0 \circ f_1$ nach $g_1 \circ f_1$. Zusammen mit (a) ergibt sich nun die Behauptung. □

Definition 1.4. Eine stetige Abbildung $f\colon X \to Y$ zwischen topologischen Räumen heißt *nullhomotop*, wenn sie homotop zu einer konstanten Abbildung $\kappa\colon X \to Y$ ($\kappa(x) = y_0$ für ein festes y_0 für alle $x \in X$) ist.

Homotopieäquivalenz. Bei der Homotopieäquivalenz handelt es sich um eine (starke) Abschwächung des Begriffs der Homöomorphie topologischer Räume. Erinnerung: Zwei topologische Räume X und Y sind homöomorph, wenn es stetige Abbildungen $f\colon X \to Y$ und $g\colon Y \to X$ gibt mit $g \circ f = 1_X$ und $f \circ g = 1_Y$. Die Gleichheiten hier werden nun durch Homotopien ersetzt:

Definition 1.5. Zwei topologische Räume X und Y heißen *homotopieäquivalent*, wenn es stetige Abbildungen $f\colon X \to Y$ und $g\colon Y \to X$ gibt mit $g \circ f \simeq 1_X$ und $f \circ g \simeq 1_Y$. (Es handelt sich um eine Äquivalenzrelation, vgl. Übungen.)

Definition 1.6. Ein topologischer Raum X heißt *zusammenziehbar*, wenn er homotopieäquivalent zum einpunktigen Raum ist.

Relative Homotopie.

Definition 1.7. Sei $A \subseteq X$ ein Teilraum. Zwei stetige Abbildungen f_0, $f_1\colon X \to Y$ heißen *homotop relativ* A, wenn es eine Homotopie $H\colon X \times [0,1] \to Y$ von f_0 nach f_1 gibt, derart dass $H(a,t) = f_0(a)$ gilt für jedes $a \in A$ und jedes $t \in [0,1]$. (Insbesondere gilt also $f_0|_A = H_t|_A = f_1|_A$ für jedes $t \in [0,1]$.) Wir schreiben

$$f_0 \simeq f_1 \text{ rel. } A.$$

Proposition 1.8. *Seien X, Y und Z topologische Räume. Seien f_0, $f_1\colon X \to Y$ homotop relativ $A \subseteq X$ sowie g_0, $g_1\colon Y \to Z$ homotop relativ $B \subseteq Y$. Ferner gelte $f_0(A) \subseteq B$. Dann sind auch $g_0 \circ f_0$ und $g_1 \circ f_1$ homotop relativ A.*

Beweis. Der Beweis von 1.3 übertragt sich problemlos. □

ZEICHNUNG: f_0, $f_1\colon [0,1] \to \mathbb{R}^2$, $f_0(0) = f_1(0)$, $f_0(1) = f_1(1)$, $A = \{0,\, 1\}$.

Retrakt. Deformationsretrakt.

Definition 1.9. Sei $A \subseteq X$ Teilraum des topologischen Raums X. Sei $\iota\colon A \to X$ die Inklusionsabbildung.

(1) Eine stetige Abbildung $r\colon X \to A$ heißt *Retraktion*, falls $r \circ \iota = 1_A$ gilt. (Also $r|_A = 1_A$.)
(2) A heißt *Retrakt* von X, falls es eine Retraktion $r\colon X \to A$ gibt.

(3) Eine Retraktion $r\colon X \to A$ heißt *Deformationsretraktion*, wenn $\iota \circ r \simeq 1_X$ gilt. (Insbesondere sind dann r und ι zueinander inverse Homotopieäquivalenzen.) Dementsprechend heißt A dann ein *Deformationsretrakt* von X.

(4) Eine Deformationsretraktion heißt *stark*, wenn bei $\iota \circ r \overset{H}{\simeq} 1_X$ die Homotopie H so gewählt werden kann, dass es eine Homotopie relativ A ist (dass also $H_t(a) = a$ für alle $a \in A$ und alle $t \in [0,1]$ gilt). Dementsprechend heißt A dann *starker Deformationsretrakt* von X.

Beispiel 1.10. (1) ZEICHNUNG: "A"

(2) $\{0\}$ ist starker Deformationsretrakt von $\mathbb{R}^n$, oder auch von D^n. Diese Räume sind also insbesondere zusammenziehbar. ZEICHNUNG

(3) Aus (2) folgt, dass für einen topologischen Raum X gilt $X \times \mathbb{R}^n \simeq X \times \{0\} \simeq X$, und analog auch für D^n (für jeden zusammenziehbaren Raum). Etwa gilt für den Volltorus T:

$$T \overset{def}{=} D^2 \times S^1 \simeq S^1.$$

ZEICHNUNG

(4) Die "Kegelspitze" ist starker Deformationsretrakt des Kegels CX über X.

ZEICHNUNG

2. Kategorien

Definition 2.1. Eine *Kategorie* $\mathcal{C}$ besteht aus folgenden Daten:

(1) Einer Klasse $\mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ von *Objekten* X, Y, Z, ...

(2) Für jedes Paar (X, Y) von Objekten einer Menge $\mathrm{Mor}\,(X, Y)$ von *Morphismen* von X nach Y.

(3) Einer *Verknüpfung*: Für jedes Tripel X, Y, Z von Objekten hat man eine Abbildung

$$\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(Y, Z) \times \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(X, Y) \to \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(X, Z),\ (g, f) \mapsto gf\ (= g \circ f).$$

Diese haben folgende Eigenschaften:

(a) Gilt $f \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(X, Y)$, $g \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(Y, Z)$ und $h \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(Z, U)$, so gilt $(hg)f = h(gf)$.

(b) Für jedes Objekt X gibt es einen Morphismus $1_X \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(X, X)$ mit $g \circ 1_X = f$ und $1_X \circ f = f$ für alle Morphismen $f \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(Y, X)$ und $g \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(X, Z)$.

Für Morphismen $f \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ schreibt man oft auch $X \xrightarrow{f} Y$ oder $f\colon X \to Y$, ohne das dies heißen muss, dass X und Y Mengen und f eine Abbildung sein muss.

Für jedes $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ ist offenbar der "identische" Morphismus 1_X eindeutig.

Beispiel 2.2. (a) Die Kategorie Set der Mengen: (1) Objekte: Alle Mengen. (2) Morphismen: Abbildungen. (3) Verknüpfung: Komposition von Abbildungen.

(b) Sei K ein Körper, und Vect_K die Kategorie der Vektorräume über K: (1) Objekte: Alle K-Vektorräume. Morphismen: Die K-linearen Abbildungen. (3) Verknüpfung: Komposition von Abbildungen.
(c) Die Kategorie Grp der Gruppen: 1) Objekte: Alle Gruppen. Morphismen: Die Gruppenhomomorphismen. (3) Verknüpfung: Komposition von Abbildungen.
(d) Die Kategorie Top der topologischen Räume: (1) Objekte: Alle topologischen Räume. Morphismen: Die stetigen Abbildungen. (3) Verknüpfung: Komposition von Abbildungen.
(e) Die Homotopiekategorie Htp: (1) Objekte: Alle topologischen Räume (wie in Top. Morphismen: Homotopieklassen $[f]$ stetiger Abbildungen f; wir schreiben

$$[X,Y] \overset{def}{=} \mathrm{Mor}_{\mathrm{Htp}}(X,Y).$$

(3) Verknüpfung: $[g] \circ [f] \overset{def}{=} [g \circ f]$. Nach 1.3 ist dies wohldefiniert.

Definition 2.3 (Isomorphismen). Sei $\mathcal{C}$ eine Kategorie. Ein Morphismus $f\colon X \to Y$ heißt *Isomorphismus*, wenn es einen Morphismus $g\colon Y \to X$ gibt mit $g \circ f = 1_X$ und $f \circ g = 1_Y$. Offenbar ist dann g durch f eindeutig bestimmt, und man schreibt oft auch $g = f^{-1}$ und nennt g den zu f inversen Morphismus.

Beispiel 2.4. (1) In der Kategorie Top sind die Isomorphismen gerade die Homöomorphismen.
(2) In der Kategorie Htp sind die Isomorphismen gerade die Homotopieäquivalenzen.

Definition 2.5. Es gibt Varianten der Kategorien Top und Htp:
(1) Objekte sind Paare (X,A), wobei X ein topologischer Raum und $A \subseteq X$ ein Teilraum ist. Morphismen $f\colon (X,A) \to (Y,B)$ sind stetige Abbildungen $f\colon X \to Y$ mit $f(A) \subseteq B$.
(2) Objekte sind wie in (1) Paare (X,A), wobei X ein topologischer Raum und $A \subseteq X$ ein Teilraum ist. Morphismen $f\colon (X,A) \to (Y,B)$ sind Homotiepieklassen $[f]$ relativ A von stetigen Abbildungen $f\colon X \to Y$ mit $f(A) \subseteq B$. Durch $[g]\circ[f] \overset{def}{=} [g\circ f]$ erhält man wegen 1.8 eine wohldefinierte Verknüpfung. Wir schreiben $[(X,A),(Y,B)]$ für die Menge der Morphismen. Besteht A aus nur einem Punkt x_0, so schreiben wir auch (X,x_0) statt $(X,\{x_0\})$.

Ein Paar (X,x_0) nennt man auch einen *punktierten Raum* und x_0 einen Basispunkt. Dementsprechend betrachtet man auch die Kategorie Top$\,*$ der punktierten topologischen Räume.

3. Die Fundamentalgruppe

3.1. Wir schauen uns Homotopieklassen von geschlossenen Wegen an. Sei X ein topologischer Raum und $x_0 \in X$ ein Punkt, ein sogenannter Basispunkt. Wir schauen uns das Paar (X,x_0) an.

Sei $\gamma\colon [0,1] \to X$ ein geschlossener Weg zum Basispunkt x_0, also mit $\gamma(0) = x_0 = \gamma(1)$. (Wir erinnern daran, dass Wege per Definition immer stetig sind.) Einen solchen nennt man auch eine *Schlaufe*. Zwischen zwei Schlaufen γ_0, γ_1 mit Basispunkt x_0 betrachten wir Homotopien relativ $\{0,\ 1\}$. Wir werden in diesem Kontext nur von Homotopie sprechen, und relativ $\{0,\ 1\}$ meist weglassen, und schreiben dementsprechend meist $\gamma_0 \simeq \gamma_1$.

Wir nennen eine stetige Abbildung $\varphi\colon [0,1] \to [0,1]$ mit $\varphi(0) = 0$ und $\varphi(1) = 1$ eine *Umparametrisierung*. Etwas inkorrekt nennen wir auch $\gamma \circ \varphi$ eine Umparametrisierung von γ.

LEMMA 3.2. *Sei $\gamma\colon [0,1] \to X$ eine Schlaufe (mit Basispunkt x_0) und φ eine Umparametrisierung. Dann gilt $\gamma \circ \varphi \simeq \gamma$.*

BEWEIS. Für alle $t,\ s \in [0,1]$ sei

$$H_t(s) \overset{def}{=} \gamma \circ \big((1-t)\varphi(s) + ts\big).$$

Man beachte, dass $(1-t)\varphi(s) + ts$ ziwschen $\varphi(s)$ und s, also in $[0,1]$ liegt. Dies definiert eine stetige Abbildung $H\colon [0,1] \times [0,1] \to [0,1]$, $(s,t) \mapsto H_t(s)$. Es gilt $H_0 = \gamma \circ \varphi$ und $H_1 = \varphi$, sowie $H_t(0) = \gamma(0) = x_0$ und $H_t(1) = \gamma(1) = x_0$. □

DEFINITION 3.3. Sei X ein topologischer Raum und $x_0 \in X$ ein Basispunkt. Sei $\pi_1(X, x_0)$ die Menge aller Homotopieklassen $[\gamma]$ (relativ $\{0,\ 1\}$) von Schlaufen $\gamma\colon [0,1] \to X$ mit Basispunkt x_0.

3.4. Seien $\alpha,\ \beta\colon [0,1] \to X$ zwei Schlaufen (mit Basispunkt x_0. Dann ist das *Produkt* oder die *Komposition* $\alpha * \beta$ die wie folgt definierte Schlaufe (mit Basispunkt x_0): Für alle $s \in [0,1]$ sei

$$\alpha * \beta(s) \overset{def}{=} \begin{cases} \alpha(2s) & 0 \le s \le 1/2; \\ \beta(2s-1) & 1/2 \le s \le 1. \end{cases}$$

Dies kann man genauso auch allgemeiner für Wege α, $beta\colon [0,1] \to X$ mit $\alpha(1) = \beta(0)$ definieren und erhält einen Weg $\alpha * \beta$ von $\alpha(0)$ nach $\beta(1)$.

LEMMA 3.5. *Seien $\alpha_0 \simeq \alpha_1$ und $\beta_0 \simeq \beta_1$ jeweils homotope Schlaufen mit Basispunkt x_0. Dann gilt $\alpha_0 * \beta_0 \simeq \alpha_1 * \beta_1$.*

BEWEIS. Seien $\alpha_0 \overset{F}{\simeq} \alpha_1$ und $\beta_0 \overset{G}{\simeq} \beta_1$. Dann sind für jedes $t \in [0,1]$ die Abbildungen F_t, $G_t\colon [0,1] \to X$ zwei Schlaufen mit Basispunkt x_0 und mit $F_0 = \alpha_0$, $F_1 = \alpha_1$ und $G_0 = \beta_0$, $G_1 = \beta_1$. Es definiert dann $F_t * G_t$ eine Homotopie (relativ x_0) zwischen $\alpha_0 * \beta_0$ und $\alpha_1 * \beta_1$. ($F * G(s,t) \overset{def}{=} F_t * G_t(s)$.) □

SATZ 3.6. *Sei X ein topologischer Raum mit Basispunkt x_0. Dann ist die $\pi_1(X, x_0)$ eine Gruppe mit Verknüpfung definiert durch*

$$[\alpha] \cdot [\beta] \overset{def}{=} [\alpha * \beta].$$

Definition 3.7. Sei X ein topologischer Raum mit Basispunkt x_0. Dann heißt $\pi_1(X, x_0)$ die *Fundamentalgruppe* von X im Basispunkt x_0.

Beweis. Nach Lemma 3.5 ist das Produkt (auf den Homotopieklassen) wohldefiniert. Seien α, β, γ drei Schlaufen. Dann ist

$$(\alpha * \beta) * \gamma(s) = \begin{cases} \alpha(4s) & 0 \leq s \leq 1/4; \\ \beta(4s-1) & 1/4 \leq s \leq 1/2; \\ \gamma(2s-1) & 1/2 \leq s \leq 1, \end{cases}$$

und

$$\alpha * (\beta * \gamma)(s) = \begin{cases} \alpha(2s) & 0 \leq s \leq 1/2; \\ \beta(4s-2) & 1/2 \leq s \leq 3/4; \\ \gamma(4s-3) & 3/4 \leq s \leq 1. \end{cases}$$

Diese beiden zusammengesetzten Schlaufen entstehen aber aus der jeweils anderen offenbar durch eine Umparametrisierung von Wegen,

$$\varphi(s) = \begin{cases} s/2 & 0 \leq s \leq 1/2; \\ s - 1/4 & 1/2 \leq s \leq 3/4; \\ 2s-1 & 3/4 \leq s \leq 1, \end{cases}$$

ZEICHNUNG

und nach Lemma 3.2 sind sie daher homotop. Die Multiplikation (auf den Homotopieklassen) ist also assoziativ.

Sei $c\colon [0,1] \to X$ die konstante Schlaufe mit $c(s) = x_0$ für alle $s \in [0,1]$. Sei γ eine beliebige Schlaufe zum Basispunkt x_0. Dann ist $\gamma * c$ eine Umparametrisierung von γ, die durch die folgende Abbildung φ zustande kommt:

$$\varphi(s) = \begin{cases} 2s & 0 \leq s \leq 1/2; \\ 1 & 1/2 \leq s \leq 1. \end{cases}$$

ZEICHNUNG

Also ist $\gamma * c \simeq \gamma$. Ebenso ist $c * \gamma \simeq \gamma$, was durch die Umparametrisierung φ' zustande kommt, definiert durch

$$\varphi'(s) = \begin{cases} 0 & 0 \leq s \leq 1/2; \\ 2s-1 & 1/2 \leq s \leq 1. \end{cases}$$

ZEICHNUNG

Es folgt, dass $[c]$ das neutrale Element in $\pi_1(X, x_0)$ ist.

Sei γ allgemeiner ein Weg von x_0 nach x_1. Definiere den zu γ *inversen Weg* $\overline{\gamma}$ von x_1 nach x_0 durch

$$\overline{\gamma}(s) \overset{def}{=} \gamma(1-s).$$

Es gilt nun $\gamma{*}\overline{\gamma} \simeq c$, denn $H_t \overset{def}{=} f_t{*}g_t$ definiert eine Homotopie hierzwischen, wobei

$$f_t(s) \overset{def}{=} \begin{cases} \gamma(s) & 0 \leq s \leq 1-t; \\ \gamma(1-t) & 1-t \leq s \leq 1. \end{cases}$$

und g_t der zu f_t inverse Weg ist. Sei c der konstante Weg mit Wert x_0. Man sieht: $f_0 = \gamma$, $f_1 = c$, und H_t definiert eine Homotopie von $\gamma{*}\overline{\gamma}$ nach $c{*}\overline{c} = c$. Vertauscht man die Rollen von γ und $\overline{\gamma}$, so sieht man, dass auch $\overline{\gamma} * \gamma \simeq c'$ gilt, wobei jetzt c' der konstante Weg mit Wert x_1 ist. Ist nun γ eine Schlaufe mit Basispunkt x_0, so folgt, dass $[\overline{\gamma}]$ zu $[\gamma]$ invers ist. □

Beispiel 3.8 (Lineare Homotopien). Je zwei Wege α und β in $\mathbb{R}^n$ mit selbem Anfangs- und selben Endpunkten sind homotop via der durch

$$h_t(s) \overset{def}{=} (1-t)\alpha(s) + t\beta(s)$$

definierten *linearen* Homotopie.

Es folgt: Ist $X \subseteq \mathbb{R}^n$ konvex (d. h. zu je zwei Punkten x, $y \in X$ liegt auch die Verbindungslinie dazwischen ganz in X), so sind je zwei Wege in X mit selben Anfangs- und selben Endpunkten homotop. Insbesondere folgt:

Proposition 3.9. *Sei $X \subseteq \mathbb{R}^n$ konvex. Dann gilt $\pi_1(X, x_0) = 1$.*

Die Rolle des Basispunktes. Sei X ein topologischer Raum und seien x_0 und x_1 zwei Basispunkte. Was ist die Beziehung zwischen $\pi_1(X, x_0)$ und $\pi_1(X, x_1)$? Offenbar spielt für die Fundamentalgruppe nur die Bogenkomponente des Basispunktes eine Rolle. Liegen x_0 und x_1 in verschiedenen Bogenkomponenten, so kann man keine Beziehung zwischen den jeweiligen Fundamentalgruppen erwarten können. Wir nehmen nun an, dass x_0 und x_1 in derselben Bogenkomponente liegen. Es gibt also einen Weg $h\colon [0,1] \to X$ mit $h(0) = x_0$ und $h(1) = x_1$. Wir zuvor im Beweis definiert sei $\overline{h}$ der zu h inverse Weg.

Satz 3.10. *Sei X ein topologische Raum. Sei h ein Weg von x_0 nach x_1. Dann definiert*

$$\Phi_h\colon \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(X, x_1),\ [\gamma] \mapsto [\overline{h} * \gamma * h]$$

einen Isomorphismus von Gruppen.

Beweis. Definiert H_t eine Homotopie von Schlaufen mit Basispunkt x_0, so definiert offenbar $\overline{h} * H_t * h$ eine Homotopie von Schlaufen mit Basispunkt x_1. Die Abbildung ist also wohldefiniert. Sie ist ein Homomorphismus von Gruppen: Denn sind γ_1, γ_2 Schlaufen mit Basispunkt x_0, so gilt

$$\begin{aligned} \Phi_h([\gamma_1] \cdot [\gamma_2]) &= \Phi_h([\gamma_1 * \gamma_2]) \\ &= [\overline{h} * \gamma_1 * \gamma_2 * h] = [\overline{h} * \gamma_1 * h * \overline{h} * \gamma_2 * h] \\ &= [\overline{h} * \gamma_1 * h] \cdot [\overline{h} * \gamma_2 * h] \\ &= \Phi_h([\gamma_1]) \cdot \Phi_h([\gamma_2]). \end{aligned}$$

Φ_h ist auch bijektiv, denn eine Umkehrabbildung ist offenbar gegeben durch $\Phi_{\overline{h}}$, denn

$$\Phi_{\overline{h}} \circ \Phi_h([\gamma]) = \Phi_{\overline{h}}([\overline{h} * \gamma * h]) = [h * \overline{h} * \gamma * h * \overline{h}] = [\gamma],$$

und ebenso $\Phi_h \circ \Phi_{\overline{h}}([\gamma]) = [\gamma]$. □

Definition 3.11. (1) Sei X ein wegzusammenhängender Raum. Da $\pi_1(X, x_0)$ bis auf Isomorphie unabhängig vom Basispunkt x_0 ist, schreiben wir auch $\pi_1(X)$ statt $\pi_1(X, x_0)$.
(2) Ein topologischer Raum X heißt *einfach zusammenhängend*, wenn er wegzusammenhängend und die Fundamentalgruppe $\pi_1(X) = 1$ trivial ist.

Korollar 3.12. *Jede konvexe Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ ist einfach zusammenhängend.*

Bemerkung 3.13. Will man sich von der Wahl eines Basispunktes befreien, so kann man auch statt Fundamentalgruppen das *Fundamentalgruppoid* $\Pi(X)$ eines topologischen Raumes X betrachten. Ein *Gruppoid* ist eine Kategorie, in dem jeder Morphismus ein Isomorphismus ist. Das Gruppoid $\Pi(X)$ ist wie folgt definiert: Die Objekte sind gerade die Punkte von X, und die Morphismen von x nach y sind gerade die Homotopieklassen von Wegen von x nach y.

Alternative Beschreibung von Schlaufen. Wir fassen die Einheitskreislinie

$$S^1 = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\| = 1\}$$

auch als Teilmenge von $\mathbb{C}$ auf.

Sei s_0 ein Basispunkt auf der Einheitskreislinie S^1, sagen wir $s_0 = 1$. Betrachte die Abbildung

$$\exp\colon [0,1] \to S^1,\ s \mapsto \exp(2\pi i s).$$

Lemma 3.14. *Sei $\gamma\colon [0,1] \to X$ ein Weg mit $\gamma(0) = x_0 = \gamma(1)$. Dann gibt es genau eine stetige Abbildung $\gamma'\colon S^1 \to X$ mit $\gamma = \gamma' \circ \exp$ und $\gamma'(s_0) = x_0$.*

Beweis. Setze $\gamma'(e^{2\pi i t}) \overset{def}{=} \gamma(t)$. Dies ist wohldefiniert wegen $\gamma(0) = \gamma(1)$. □

Lemma 3.15. *Es gilt $\gamma_0 \simeq \gamma_1$ rel. $\{0, 1\}$ genau dann, wenn $\gamma_0' \simeq \gamma_1'$ rel. s_0 gilt.*

Beweis. Sind $\gamma_0 \overset{H}{\simeq} \gamma_1$ rel. $\{0, 1\}$ mit der Homotopie $[0,1] \times [0,1] \to X$, so ist $H'\colon S^1 \times [0,1] \to X$ definiert durch $H'(e^{2\pi i s}, t) \overset{def}{=} H(t, s)$ eine Homotopie, die γ_0' in γ_1' überführt relativ s_0. Die Umkehrung geht in offensichtlicher Weise genauso. □

In offensichtlicher Weise definiert man auf $[(S^1, s_0), (X, x_0)]$ eine Verknüpfung, so dass $[(S^1, s_0), (X, x_0)]$ eine Gruppe ist.

Proposition 3.16. $\pi_1(X, x_0) \simeq [(S^1, s_0), (X, x_0)]$.

4. Die Fundamentalgruppe der Kreislinie

Satz 4.1. *Die Abbildung*

$$\Phi\colon \mathbb{Z} \to \pi_1(S^1),\ n \mapsto [\omega_n],$$

wobei ω_n *die Schlaufe* $s \mapsto \exp(ns) = e^{2\pi ins}$ *mit Basispunkt* 1 *ist, definiert einen Isomorphisus von Gruppen.*

Beweis. Sei $p = \exp\colon \mathbb{R} \to S^1$ die Abbildung $s \mapsto e^{2\pi is}$. Diese Abbildung kann man sich gut visuell vorstellen, wenn man $\mathbb{R}$ als Spirale in den $\mathbb{R}^3$ einbettet, parametrisiert durch $s \mapsto (\cos(2\pi s), \sin(2\pi s), s)$; dann ist p die Projektion $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $(x, y, z) \mapsto (x, y)$.

ZEICHNUNG

Es ist die Schlaufe ω_n die Komposition $p \circ \widetilde{\omega}_n$, wobei $\widetilde{\omega}_n\colon [0, 1] \to \mathbb{R}$ der durch $\widetilde{\omega}_n(s) \overset{def}{=} ns$ definierte Weg ist, der in 0 startet und in n endet; dies ist also der Weg, der die Spirale $|n|$-mal durchläuft, aufwärts, falls $n > 0$, und abwärts, falls $n < 0$. Man nennt $\widetilde{\omega}_n$ auch eine *Hochhebung* (engl. Lift) von ω_n.

Es ist $\Phi(n)$ die Homotopieklasse der Schlaufe $p \circ \widetilde{\gamma}$, wobei $\widetilde{\gamma}$ ein belieber Weg in $\mathbb{R}$ von 0 nach n ist. denn ein solcher Weg $\widetilde{\gamma}$ ist homotop zu $\widetilde{\omega}_n$ vermöge der linearen Homotopie $(1-t)\widetilde{\gamma} + t\widetilde{\omega}_n$, und damit ist $p \circ \widetilde{\gamma}$ homotop zu $p\widetilde{\omega}_n = \omega_n$.

Wir zeigen, dass Φ ein Homomorphismus ist. Dazu sei $\tau_m\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die Verschiebung um m, also $\tau_m(x) \overset{def}{=} x + m$. Es ist $\widetilde{\omega}_m * (\tau_m \circ \widetilde{\omega}_n)$ ein Weg in $\mathbb{R}$ von 0 nach $n + m$. Also ist $\Phi(m + n)$ die Homotopieklasse der Schlaufe in S^1, die das Bild dieses Weges unter p ist. Aber dieses Bild ist $\omega_m * \omega_n$, so dass also $\Phi(m + n) = \Phi(m) \cdot \Phi(n)$ gilt.

Um die Bijektivität von Φ zu zeigen, benötigen wir die folgenden Aussagen:

(a) Zu jedem Weg $\gamma\colon [0, 1] \to S^1$, der in einem Punkt $x_0 \in S^1$ startet, und zu jedem $\widetilde{x}_0 \in p^{-1}(x_0)$ gibt es genau eine Hochhebung $\widetilde{\gamma}\colon [0, 1] \to \mathbb{R}$, die in $\widetilde{x}_0$ startet.

(b) Zu jeder Homotopie $\gamma_t\colon [0, 1] \to S^1$ von Wegen die in x_0 starten, und zu jedem $\widetilde{x}_0 \in p^{-1}(x_0)$ gibt es genau eine hochgehobene Homotopie $\widetilde{\gamma}_t\colon [0, 1] \to \mathbb{R}$ relativ $\{0, 1\}$, die in $\widetilde{x}_0$ starten.

Wir zeigen, wie aus diesen beiden Aussagen nun die Bijektivität folgt. Surjektivität: Sei $\gamma\colon [0, 1] \to S^1$ ein Schlaufe mit Basispunkt 1, welches ein gegebenes Element von $\pi_1(S^1)$ repräsentiert. Wegen (a) gibt es eine Hochhebung $\widetilde{\gamma}$, die in 0 startet. Dieser Weg endet in einer ganzen Zahl n, da $p \circ \widetilde{\gamma}(1) = \gamma(1) = 1$ gilt, und es ist $p^{-1}(1) = \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{R}$. Es folgt $\Phi(n) = [p \circ \widetilde{\gamma}] = [\gamma]$.

Injektivität: Seien $m, n \in \mathbb{Z}$ mit $\Phi(m) = \Phi(n)$. Es gilt also $\omega_m \simeq \omega_n$. Sei H_t eine Homotopie von $H_0 = \omega_m$ nach $H_1 = \omega_n$. Wegen (b) existiert eine hochgehobene Homotopie $\widetilde{H}_t$ von Wegen, die in 0 starten. Wegen der Eindeutigkeit in (a) folgt $\widetilde{H}_0 = \widetilde{\omega}_m$ und $\widetilde{H}_1 = \widetilde{\omega}_n$. Da $\widetilde{H}_t$ eine Homotopie relativ $\{0, 1\}$ ist, ist der Endpunkt $\widetilde{H}_t(1)$ unabhängig von t. Für $t = 0$ ist dieser Endpunkt m, für $t = 1$ ist der Endpunkt n, also folgt $m = n$.

Es bleiben also die Aussagen (a) und (b) zu beweisen. Dazu genügt es, die folgende Aussage zu beweisen, die als Spezialfälle (a) und (b) enthält.

(c) Gegeben eine stetige Abbildung $F\colon Y \times [0, 1] \to S^1$ und eine stetige Abbildung $\widetilde{F}\colon Y \times \{0\} \to \mathbb{R}$, die $F|_{Y\times\{0\}}$ hochhebt, dann gibt es eine eindeutige stetige Abbildung $\widetilde{F}\colon Y \times [0, 1] \to \mathbb{R}$, die F hochhebt und sich auf $Y \times \{0\}$ zu dem gegebenen $\widetilde{F}$ einschränkt.

Es ist nämlich (a) der Spezialfall, dass Y aus einem Punkt besteht, und (b) ergibt sich als Spezialfall $Y = [0, 1]$, denn die Homotopien γ_t aus (b) bedeuten ja, dass sie eine stetige Funktion $F\colon [0, 1] \times [0, 1] \to S^1$ definieren, durch $F(s, t) \overset{def}{=} \gamma_t(s)$. Wegen (a) erhält man eine eindeutige Hochhebung $\widetilde{F}\colon [0, 1] \times \{0\} \to \mathbb{R}$, und (c) liefert eine eindeutige Hochhebung $\widetilde{F}\colon [0, 1] \times [0, 1] \to \mathbb{R}$. Es sind $\widetilde{F}|_{\{0\}\times[0,1]}$ und $\widetilde{F}|_{\{1\}\times[0,1]}$ Wege, die konstante Wege hochheben, müssen also selbst konstant sein nach der Eindeutigkeitsaussage in (a). Also ist $\widetilde{\gamma}_t \overset{def}{=} \widetilde{F}(s, t)$ eine (relative) Homotopie von Wegen, die γ_t hochheben wegen $p \circ \widetilde{F} = F$.

Wir zeigen nun Aussage (c). Wir benutzen dabei die folgende Eigenschaft, die die Abbildung $p\colon \mathbb{R} \to S^1$ hat:

(d) Es gibt eine offene Überdeckung $(U_i)_{i\in I}$ von S^1, so dass sich für jedes $i \in I$ das Urbild $p^{-1}(U_i)$ in eine disjunkte Vereinigung von offenen Mengen zerlegt, die alle jeweils durch p homöomorph auf U_i abgebildet werden.

In der Tat, man nimmt für U_i kleine, offene Kreissegmente. (Anschauliches Bild!)

Sei $y_0 \in Y$, sei $t \in [0, 1]$. Da $F\colon Y \times [0, 1] \to S^1$ stetig ist, gibt es eine offene Umgebung von (y_0, t) der Form $V_t \times]\, a_t, b_t\, [$ (wobei V_t offene Umgebung von y_0 und $t \in]\, a_t, b_t\, [$), so dass $F(V_t \times]\, a_t, b_t\, [) \subseteq U_i$ gilt für ein j (U_j enthält das Bild $F(y_0, t)$). Da $\{y_0\} \times [0, 1]$ kompakt ist, gibt es endlich viele solcher Umgebungen $V_t \times]\, a_t, b_t\, [$, die $\{y_0\} \times [0, 1]$ überdecken. Es folgt, dass man eine Umgebung V von y_0 findet (den Durchschnitt der endlich vielen V_t) und eine Zerlegung $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_m = 1$ von $[0, 1]$, so dass für jedes i nun $F(V \times [t_i, t_{i+1}]) \subseteq U_j$ für ein j gilt; wir schreiben $j = i$. Per Induktion kann man nun annehmen, dass $\widetilde{F}$ bereits auf $V \times [0, t_i]$ konstruiert ist. Es gilt $F(V \times [t_i, t_{i+1}]) \subseteq U_i$, und daher gibt es wegen (d) eine offene Menge $\widetilde{U}_i \subseteq \mathbb{R}$, die durch p homöomorph auf U_i abgebildet wird und den Punkt $\widetilde{F}(y_0, t_i)$ enthält. Verkleinert man $V \times \{t_i\}$ weiter, ersetzt es etwa durch seinen Durchschnitt mit $(\widetilde{F}|_{V\times\{t_i\}})^{-1}(\widetilde{U}_i)$, so kann man $\widetilde{F}(V \times \{t_i\}) \subseteq \widetilde{U}_i$ annehmen. Definiere nun $\widetilde{F}$ auf $V \times [t_i, t_{i+1}]$ als Komposition von F mit dem Homöomorphismus $p^{-1}\colon U_i \to \widetilde{U}_i$. Nach endlichen vielen Wiederholung erhält man schließlich eine Hochhebung $\widetilde{F}\colon V \times [0, 1] \to \mathbb{R}$ für eine Umgebung V von y_0.

Wir zeigen jetzt die Eindeutigkeitsaussage in (c) für den Spezialfall, dass Y ein Punkt ist. Dann kann man Y in der Notation übergehen. Nehme also an, dass $\widetilde{F}$ und $\widetilde{F}'$ zwei Hochhebungen von $F\colon [0,1] \to S^1$ sind mit $\widetilde{F}(0) = \widetilde{F}'(0)$. Wie zuvor wählen wir eine Zerlegung $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_m = 1$ von $[0,1]$, so dass $F([t_i, t_{i+1}]) \subseteq U_i$ gilt (für ein U_i). Nehme induktiv an, dass $\widetilde{F} = \widetilde{F}'$ auf $[0, t_i]$ gilt. Es ist $\widetilde{F}([t_i, t_{i+1}])$ zusammenhängend, und daher muss es in einer einzigen der disjunkten offenen Mengen $\widetilde{U}_i$ liegen, die durch p homöomorph auf U_i abgebildet werden (nach (d)). Dies gilt auch für $\widetilde{F}'([t_i, t_{i+1}])$, und es muss im selben $\widetilde{U}_i$ liegen, da $\widetilde{F}(t_i) = \widetilde{F}'(t_i)$. Da p injektiv auf $\widetilde{U}_i$ ist und $p \circ \widetilde{F} = p \circ \widetilde{F}'$ gilt, folgt $\widetilde{F} = \widetilde{F}'$ auf $[t_i, t_{i+1}]$, und induktiv auf ganz $[0,1]$.

Es ist für (c) noch zu zeigen, dass $\widetilde{F}$ global auf ganz $Y \times [0,1]$ (eindeutig) definiert werden kann. Es ist oben auf Mengen der Form $V \times [0,1]$ definiert worden, und deren Einschränkungen auf jedes Segment $\{y\} \times [0,1]$ sind eindeutig, also müssen sie auch auf zwei sich überlappenden Mengen der Form $V \times [0,1]$ übereinstimmen. In der Weise kann $\widetilde{F}$ auf ganz $Y \times [0,1]$ definiert werden, und dies ist stetig, da die Einschränkungen auf jedes $V \times [0,1]$ stetig ist, und eindeutig, da die Einschränkung auf jedes Segment $\{y\} \times [0,1]$ eindeutig ist. □

PROPOSITION 4.2. *Die Umkehrabbildung des Isomorphismus in Satz 4.1 ist durch den Abbildungsgrad gegeben.*

5. Anwendungen

Der Fundamentalsatz der Algebra.

SATZ 5.1. *Jedes nicht-konstante Polynom mit komplexen Koeffizienten hat eine Nullstelle in $\mathbb{C}$.*

BEWEIS. Sei p ein nicht-konstantes Polynom, welches keine komplexe Nullstelle hat; sei p von der Form

$$p(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_{n-1} z + a_n \quad (z \in \mathbb{C})$$

wobei $n \geq 1$ fest ist. Für jede reelle Zahl $r \geq 0$ definiert der Term

$$f_r(s) \overset{def}{=} \frac{p(re^{2\pi i s})/p(r)}{|p(re^{2\pi i s})/p(r)|}$$

eine Schlaufe in $S^1 \subseteq \mathbb{C}$ mit Basispunkt 1. Es definiert f_r eine Homotopie von Schlaufen mit Basispunkt 1, wobei f_0 die triviale (konstante) Schlaufe ist. Es ist also die Homotopieklasse $[f_r] \in \pi_1(S^1)$ trivial ($= 0$) für alle $r \geq 0$. Wähle nun r größer als $|a_1| + \cdots + |a_n|$, und auch größer als 1. Dann gilt für $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| = r$ die Ungleichung

$$|z^n| = r^n = r \cdot r^{n-1} > (|a_1| + \cdots + |a_n|) \cdot |z^{n-1}| \geq |a_1 z^{n-1} + \cdots + a_n|.$$

Hieraus folgt, dass das Polynom

$$p_t(z) \overset{def}{=} z^n + t(a_1 z^{n-1} + \cdots + a_n)$$

keine Nullstelle auf der Kreislinie $|z| = r$ hat, wenn $0 \leq t \leq 1$ gilt. setzt man nun p_t statt p in die Formel für f_r ein, und läuft t von 0 bis 1, so erhalten wir eine Homotopie von der Schlaufe f_r zur Schlaufe ω_n. Insgesamt folgt $[\omega_n] = [f_r] = 0$, also $n = 0$, Widerspruch. □

Der Brouwerscher Fixpunktsatz in Dimension 2.

Satz 5.2. *Jede stetige Funktion $f\colon D^2 \to D^2$ hat einen Fixpunkt, d. h. einen Punkt $x \in D^2$ mit $f(x) = x$.*

Beweis. Nehme im Gegenteil an, dass $f(x) \neq x$ gilt für alle $x \in D^2$. Definiere $r\colon D^2 \to S^1$ $(= \partial D^2)$ dadurch, dass $r(x)$ der Schnittpunkt der Geraden, die in $f(x)$ startet und durch x geht, mit dem Rand S^1. Dies definiert offenbar eine stetige Funktion. (Kleine Veränderungen von x bewirken nur kleine Veränderungen von $r(x)$.) Es gilt $r(x) = x$ für alle $x \in S^1$. Also ist r eine Retraktion von D^2 auf S^1. Wir zeigen, dass eine solche Retraktion nicht existieren kann:

Sei f_0 eine Schlaufe in S^1. In D^2 gibt es eine Homotopie von f_0 zur konstanten Schlaufe, etwa die lineare Homotopie $f_t(s) = (1-t)f_0(s) + tc$, wobei c die konstante Schlaufe mit selben Basispunkt wie der von f_0 ist. Da r die Identität auf S^1 ist, folgt, dass $r \circ f_t$ eine Homotopie in S^1 von $r \circ f_0 = f_0$ nach c (eingeschränkt auf S^1) ist. Es würde also $\pi(S^1) = 0$ folgen, Widerspruch. □

Der Satz von Borsuk-Ulam in Dimension 2.

Satz 5.3. *Sei $f\colon S^2 \to \mathbb{R}^2$ eine stetige Abbildung. Dann gibt es ein $x \in S^2$ mit $f(x) = f(-x)$.*

Beweis. Angenommen, dies ist falsch für $f\colon S^2 \to \mathbb{R}^2$. Dann definiere $g\colon S^2 \to S^1$ durch

$$g(x) \stackrel{def}{=} \frac{f(x) - f(-x)}{|f(x) - f(-x)|}.$$

Sei $\gamma\colon [0,1] \to S^2$ die Schlaufe, die den "Äquator" umrundet, also $\gamma(s) \stackrel{def}{=} (\cos(2\pi s), \sin(2\pi s), 0)$, und sei $h \stackrel{def}{=} g \circ \gamma\colon [0,1] \to S^1$. Dies ist eine Schlaufe mit Basispunkt 1. Da $g(-x) = -g(x)$ gilt, folgt $h(s + 1/2) = -h(s)$ für alle $s \in [0, 1/2]$. Wie im Beweis für $\pi_1(S^1) \simeq \mathbb{Z}$ oben gezeigt wurde, kann h hochgehoben werden zu einem Weg $\widetilde{h}\colon [0,1] \to \mathbb{R}$. Es gilt dann $\widetilde{h}(s + 1/2) = \widetilde{h}(s) + m/2$ für eine ungerade ganze Zahl m. Hierbei hängt m stetig von s ab, ist als ganze Zahl damit unabhängig von s. Insbesondere ergibt sich $\widetilde{h}(1) = \widetilde{h}(1/2) + m/2 = \widetilde{h}(0) + m$. Es ergibt sich also $h \simeq \omega_m \not\simeq \omega_0$, da m ungerade ist. Andererseits, $\gamma \simeq \omega_0 = 0$, also auch $h = g \circ \gamma \simeq 0$, Widerspruch. □

6. Induzierte Homomorphismen und Funktoren

Induzierte Homomorphismen. π_1 Ordnet nicht nur jedem (punktierten) topologischen Raum eine Gruppe zu (also einem Objekt der einen Kategorie ein Objekt der anderen Kategorie), sondern "wirkt" auch auf stetigen Abbildungen (also auf den Morphismen).

PROPOSITION 6.1. *Sei $f\colon X \to Y$ eine stetige Abbildung zwischen topologischen Räumen X und Y. Sei $x_0 \in X$. Dann ist*

$$f_*\colon \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, f(x_0)),\ [\gamma] \mapsto [f \circ \gamma]$$

ein Homomorphismus von Gruppen, der sog. (durch f) induzierte Homomorphismus. *Induzierte Homomorphismen haben folgende Eigenschaften:*

(1) $(g \circ f)_* = g_* \circ f_*$ *für alle stetigen Abbildungen* $(X, x_0) \xrightarrow{f} (Y, y_0) \xrightarrow{g} (Z, z_0)$.
(2) $(1_X)_* = 1_{\pi_1(X,x_0)}$ *für alle punktierten Räume* (X, x_0).

6.2. Man schreibt auch $\pi_1(f) = f_*$. Es gilt dann
(1) $\pi_1(g * f) = \pi_1(g) \circ \pi_1(f)$;
(2) $\pi_1(1_X) = 1_{\pi_1(X,x_0)}$ für alle punktierten Räume (X, x_0).

BEWEIS VON PROPOSITION 6.1. Seien γ_1, γ_2 Schlaufen in X mit Basispunkt x_0. Dann gilt

$$\begin{aligned} f_*([\gamma_1] \cdot [\gamma_2]) &= f_*([\gamma_1 * \gamma_2]) = [f \circ (\gamma_1 * \gamma_2)] \\ &\overset{klar}{=} [(f \circ \gamma_1) * (f \circ \gamma_2)] \\ &= f_*([\gamma_1]) \cdot f_*([\gamma_2]). \end{aligned}$$

Also ist f_* ein Gruppenhomomorphismus.
Es gilt (1): Seien f und g wie in der Proposition. Es gilt

$$\begin{aligned} (g \circ f)_*([\gamma]) &= [(g \circ f) \circ \gamma] = [g \circ (f \circ \gamma)] \\ &= g_*([f \circ \gamma])) = g_*(f_*([\gamma])). \end{aligned}$$

Es gilt (2): Es ist $(1_X)_*([\gamma]) = [1_X \circ \gamma] = [\gamma]$. □

Funktoren.

DEFINITION 6.3. Seien $\mathcal{C}$ und $\mathcal{D}$ Kategorien. Ein (kovarianter) *Funktor* $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ ordnet jedem Objekt X aus $\mathcal{C}$ ein Objekt $F(X)$ aus $\mathcal{D}$ und jedem $f \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ ein $F(f) \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{D}}(F(X), F(Y))$ mit folgenden Eigenschaften:

(1) Für alle $f \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ und $g \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(Y, Z)$ gilt $F(gf) = F(g)F(f)$.
(2) Für alle $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ gilt $F(1_X) = 1_{F(X)}$.

Ein *kontravarianter* Funktor ordnet jedem $f \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ ein $F(f) \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{D}}(F(Y), F(X))$ zu, und es gilt statt (1) die Eigenschaft

(1*) Für alle $f \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ und $g \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(Y, Z)$ gilt $F(gf) = F(f)F(g)$.

BEISPIEL 6.4. Sei $\mathcal{C}$ eine Kategorie und sei $C \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$.

(1) Es definiert $\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(C,-)\colon \mathcal{C} \to \mathrm{Set}$ einen (kovarianten) Funktor; hierbei ist für $f \in \mathrm{Mor}_C(X,Y)$
$$\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(C,f)\colon\ \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(C,X) \to \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(C,Y)$$
definiert durch $h \mapsto f \circ h$.

(2) Es definiert $\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(-,C)\colon \mathcal{C} \to \mathrm{Set}$ einen kontravarianten Funktor; hierbei ist für $f \in \mathrm{Mor}_C(X,Y)$
$$\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(f,C)\colon\ \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(Y,C) \to \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(X,C)$$
definiert durch $h \mapsto h \circ f$.

Proposition 6.5. *π_1 ist ein Funktor von der Kategorie* Top∗ *der punktierten topologischen Räume in die Kategorie* Grp *der Gruppen.*

Beweis. Folgt direkt aus 6.2. □

Proposition 6.6. *Seien $\mathcal{C}$ und $\mathcal{D}$ Kategorien und $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ ein Funktor. Ist f ein Isomorphismus zwischen Objekten in $\mathcal{C}$, so ist $F(f)$ ein Isomorphismus in $\mathcal{D}$.*

Beweis. Es gibt einen Morphismus g mit $gf = 1$ und $fg = 1$. Es folgt $F(g)F(f) = F(gf) = F(1) = 1$ und $F(f)F(g) = F(fg) = F(1) = 1$. (Analog im kontravarianten Fall.) □

Dies läßt sich insbesondere auf den Funktor π_1 anwenden. Etwas anders formuliert folgt:

Korollar 6.7. *Seien X und Y wegzusammenhängende topologische Räume. Gilt $\pi_1(X) \not\cong \pi_1(Y)$, so sind X und Y nicht homöomorph.*

Beweis. In der Kategorie Top sind die Isomorphismen gerade die Homöomorphismen. □

Proposition 6.8. *Sei $A \subseteq X$ ein Retrakt von X, sei $x_0 \in A$. Dann ist der durch die Inklusion $\iota\colon A \to X$ induzierte Homomorphismus $\iota_*\colon \pi_1(A,x_0) \to \pi_1(X,x_0)$ injektiv.*

Beweis. Es gibt eine Retraktion, d. h. eine stetige Abbildung $r\colon X \to A$ mit $r \circ \iota = 1_A$. Es folgt $r_* \circ \iota_* = 1$, und insbesondere ist ι_* injektiv. □

Lemma 6.9. *Sei $x_0 \in X$ ein Basispunkt. Sei $f_t\colon X \to Y$ eine Homotopie, und sei h der Weg $t \mapsto f_t(x_0)$. Dann gilt*
$$\Phi_h \circ (f_0)_* = (f_1)_*,$$
wobei $\Phi_h\colon \pi_1(Y,f_0(x_0)) \to \pi_1(Y,f_1(x_0))$ den schon zuvor definierten Basiswechelsisomorphismus bezeichnet.

Beweis. Sei h_t die Einschränkung von h auf $[0,t]$, wobei aber wieder auf das Intervall $[0,t]$ umparametrisiert wird, also $h_t(s) \overset{def}{=} h(ts)$. Dies ist also ein Weg von $f_0(x_0)$ nach $f_t(x_0)$. Sei γ eine Schlaufe in X mit Basispunkt x_0. Dann ergibt $h_t * (f_t \circ \gamma) * \overline{h_t}$ eine Homotopie von Schlaufen im Basispunkt $f_0(x_0)$. Für $t = 0$ und $t = 1$ erhält man also $f_0 \circ \gamma \simeq h * (f_1 \circ \gamma) * \overline{h}$, also $\overline{h} * (f_0 \circ \gamma) * h \simeq f_1 \circ \gamma$ und damit $\Phi_h((f_0)_*([\gamma])) = (f_1)_*([\gamma])$. □

Satz 6.10. *Sei $f\colon X \to Y$ eine Homotopieäquivalenz zwischen topologischen Räumen X und Y. Sei $x_0 \in X$. Dann ist $f_*\colon \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, f(x_0))$ ein Isomorphismus.*

Beweis. Es gibt ein stetiges $g\colon Y \to X$ mit $g \circ f \simeq 1_X$ und $f \circ g \simeq 1_Y$. Betrachte die Komposition der induzierten Abbildungen

$$\pi_1(X, x_0) \xrightarrow{f_*} \pi_1(Y, f(x_0)) \xrightarrow{g_*} \pi_1(X, g(f(x_0))) \xrightarrow{f_*} \pi_1(Y, f(g(f(x_0)))).$$

Wegen $g \circ f \simeq 1_X$ erhält man mit dem Lemma $g_* \circ f_* = \Phi_h$ für einen Weg h, also ist $g_* \circ f_*$ ein Isomorphismus, insbesondere f_* injektiv. Genauso erhält man, dass $f_* \circ g_*$ ein Isomorphismus und insbesondere f_* surjektiv ist. Insgesamt ist also f_* bijektiv. $\square$

Eine häufige Anwendung ist die folgende Umformulierung:

Korollar 6.11. *Seien X und Y wegzusammenhängende topologische Räume. Gilt $\pi_1(X) \not\cong \pi_1(Y)$, so sind X und Y nicht homotopieäquivalent.*

Korollar 6.12. *Sei $A \subseteq X$ ein Deformationsretrakt von X, sei $x_0 \in A$. Dann ist der durch die Inklusion $\iota\colon A \to X$ induzierte Homomorphismus $\iota_*\colon \pi_1(A, x_0) \to \pi_1(X, x_0)$ ein Isomorphismus.*

Korollar 6.13. *Sei X ein zusammenziehbarer Raum. Dann ist X einfach zusammenhängend.*

Bemerkung 6.14. Sei $\mathcal{C}$ eine Kategorie. Sei $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf $\mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ (meist: Isomorphie von Objekten). Sei M eine Klasse. Eine Abbildung $I\colon\ \mathrm{Ob}(\mathcal{C}) \to M$ heißt eine *Invariante* bzgl. $\sim$, wenn für alle $X, Y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ gilt:

$$X \sim Y \quad \Rightarrow \quad I(X) = I(Y).$$

Gilt auch immer die Umkehrung, so heißt die Invariante *vollständig*. Es folgt:

π_1 ist eine Invariante auf der Kategorie der punktierten topologischen Räume bzgl. Homöomorphie, sogar bzgl. Homotopieäquivalenz.

Sind G_1 und G_2 zwei Gruppen, sie ist das Produkt $G_1 \times G_2$ ein Gruppe mit der folgenden Verknüpfung: $(g_1, g_2) \times (g_1', g_2') \overset{def}{=} (g_1 g_1', g_2 g_2')$.

Satz 6.15. *Seien (X, x_0) und (Y, y_0) punktierte topologische Räume. Die Abbildung*

$$\begin{array}{rcl} \pi_1(X \times Y, (x_0, y_0)) & \to & \pi_1(X, x_0) \times \pi_1(Y, y_0) \\ [\gamma] & \mapsto & ([p_X \circ \gamma], [p_Y \circ \gamma]) \end{array}$$

(mit Projektionen $p_X\colon X \times Y \to X$ und $p_Y\colon X \times Y \to Y$) ist ein Isomorphismus.

Beweis. Die Aussage wurde schon in den Übungen behandelt. $\square$

7. Die Fundamentalgruppe einer n-Spähre

SATZ 7.1. *Sei $n \geq 2$. Dann gilt $\pi_1(S^n) = 0$.*

BEWEIS. Sei γ eine Schlaufe in S^n mit Basispunkt x_0. Wenn es einen Punkt $x \in S^n$ gibt mit $x \notin \gamma([0,1])$, so ist γ nullhomotop, denn $S^n \setminus \{x\}$ ist homöomorph zum $\mathbb{R}^n$. Also genügt es zu zeigen, dass γ homotop zu einer nicht-surjektiven Schlaufe ist.

Sei $x \in S^n$ ein Punkt mit $x \neq x_0$. Sei U eine offene Kugel um x in U mit $x_0 \notin U$. Es ist $\gamma^{-1}(U) \subseteq]0,1[$ offen, also disjunkte Zerlegung von offenen Intervallen $]a_i, b_i[$ (denn die Zusammenhangskomponenten in einem lokal zusammenhängenden Raum sind offen, vgl. I.6.18). Die kompakte Menge $f^{-1}(x)$ liegt in der Vereinigung endlich vieler dieser offenen Intervalle. Für ein solches $]a_i, b_i[$ sei γ_i der Weg, der durch Einschränkung von γ auf $[a_i, b_i]$ entsteht. Dieser Weg liegt im Abschluss von U, wobei $f(a_i)$ und $f(b_i)$ auf dem Rand liegen. Da $n \geq 2$ ist, gibt es einen Weg β_i in $\overline{U}$, dessen Bild disjunkt ist von x, etwa einen Weg auf dem Rand von U, welcher homöomorph zu einer Sphäre S^{n-1}, also wegzusammenhängend ist. Der Abschluss von U ist homöomorph zu einer konvexen Teilmenge des $\mathbb{R}^n$, also sind γ_i und β_i homotop. Also kann γ homotop abgeändert werden, indem γ_i durch β_i ersetzt wird. Wiederholt man dies für die endlich vielen Intervalle $]a_i, b_i[$, die $f^{-1}(x)$ enthalten, so bekommt man eine Schlaufe β in S^n, die homotop ist zu γ und mit $x \notin \beta([0,1])$. □

BEISPIEL 7.2. Sei $x \in \mathbb{R}^n$. Dann ist $\mathbb{R}^n \setminus \{x\}$ homöomorph zu $S^{n-1} \times \mathbb{R}$. Also ist $\pi_1(\mathbb{R}^n \setminus \{x\}) \simeq \pi_1(S^{n-1}) \times \pi_1(\mathbb{R})$, und es folgt

$$\pi_1(\mathbb{R}^n \setminus \{x\}) \simeq \begin{cases} \mathbb{Z} & n = 2; \\ 0 & n > 2. \end{cases}$$

KOROLLAR 7.3. *Für $n \neq 2$ ist $\mathbb{R}^n$ nicht homöomorph zu $\mathbb{R}^2$.*

Allgemeiner gilt, dass $\mathbb{R}^m$ nicht homöomorph ist zu $\mathbb{R}^n$ ist, falls $m \neq n$. Dafür braucht man aber "höhere" Homotopiegruppen oder Homologiegruppen.

BEWEIS. Angenommen, $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^n$ ist ein Homöomorphismus. Dann sind $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ und $\mathbb{R}^n \setminus \{f(0)\}$ homöomorph. Im Fall $n = 1$ gibt es sofort einen Widerspruch, denn $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ ist wegzusammenhängend, $\mathbb{R} \setminus \{f(0)\}$ aber nicht. Sei also $n > 2$. Aber dann zeigt das vorherige Beispiel, dass $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ und $\mathbb{R}^n \setminus \{f(0)\}$ nicht-isomorphe Fundamentalgruppen haben, Widerspruch. □

8. Satz von Seifert und van Kampen

Freie Produkte von Gruppen. Seien G und H Gruppen. Das *direkte Produkt* Gruppe $G \times H$ hat die Eigenschaft, dass G und H natürlich darin einbetten, und dann Elemente aus G mit Elementen aus H kommutieren. Soll dies nicht gelten, so bildet man das *freie Produkt* $G * H$: Die Elemente sind beliebige *reduzierte Wörter* der Form $a_1 a_2 \dots a_n$ von beliebiger, endlicher Länge n, wobei $a_i \in (G \cup H) \setminus \{1\}$ gilt, und benachbarte Elemente a_i, a_{i+1} nicht in derselben Gruppe liegen (beliebe Wörter können immer reduziert werden). Verschiedene reduzierte Wörter liefern (per definitionem) verschiedene Elemente. Zwei solche reduzierten Wörter $a_1 \dots a_n$ und $b_1 \dots b_m$ werden multipliziert, indem man sie einfach hintereinander schreibt. Sind dabei a_n und b_1 in derselben Gruppe, so nimmt man deren Produkt $a_n b_1$ als "Buchstaben" an der Stelle; falls dies das neutrale Element ergibt, wird es weggelassen, u.s.w. Das "leere" Wort (der Länge null) ist das neutrale Element. Man zeigt, dass dies eine assoziative Verknüfung gibt. Ist $a_1 \dots a_n$ ein reduziertes Wort, so ist auch $a_n^{-1} \dots a_1^{-1}$ ein reduziertes Wort, und offenbar das Inverse.

Beispiel 8.1. (1) Wir schauen uns $\mathbb{Z} * \mathbb{Z}$ an. Dazu sei a der Erzeuger der einen Kopie von $\mathbb{Z}$, und b der Erzeuger der anderen Kopie. Dann ist etwa $a^5 b^{-2} a b^{-11} a^{-3}$ ein reduziertes Wort.
(2) Ein reduziertes Wort in $\mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_2$ ist einfach ein "alternierendes" Wort *ababa* o. ä. Man beachte, dass $a^2 = 1 = b^2$ gilt.

Durch die folgende "universelle Eigenschaft" ist das freie Produkt (bis auf Isomorphie) eindeutig bestimmt:

Proposition 8.2 (Universelle Eigenschaft der freien Produkts). *Seien G_1, G_2, H Gruppen. Seien $f_1 \colon G_1 \to H$ und $f_2 \colon G_2 \to H$ Gruppenhomomorphismen. Dann gibt es genau einen Gruppenhomomorphismus $f \colon G_1 * G_2 \to H$ mit $f|_{G_1} = f_1$ und $f|_{G_2} = f_2$.*

Beweis. Ist $a_1 \dots a_n$ ein reduziertes Wort mit $a_i \in G_{\alpha_i}$ (mit $\alpha_i \in \{1, 2\}$), so definiert man (und muss dies so tun)

$$f(a_1 \dots a_n) \overset{def}{=} f_{\alpha_1}(a_1) \dots f_{\alpha_n}(a_n).$$

□

Satz 8.3. *Sei der topologische Raum X Vereinigung der wegzusammenhängenden, offenen Teilräume U und U'. Es sei $U \cap U'$ wegzusammenhängend, und enthalte einen Basispunkt x_0. Bezeichne mit $j \colon U \to X$, $j' \colon U' \to X$, $i \colon U \cap U' \to U$ und $i' \colon U \cap U' \to U'$ die Inklusionen. Die induzierten Homomorphismen j_* und j'_* liefern eine eindeutige Fortsetzung $\Phi \colon \pi_1(U) * \pi_1(V) \to \pi_1(X)$.*

(1) *Das Diagramm*

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(U \cap U') & \xrightarrow{i_*} & \pi_1(U) \\ {\scriptstyle i'_*}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle j_*} \\ \pi_1(U') & \xrightarrow{j'_*} & \pi_1(X) \end{array}$$

ist kommutativ.

(2) *Φ ist surjektiv.*

(3) *Der Kern N von Φ ist der durch alle Elemente der Form*

$$i_*(w)i'_*(w)^{-1} \quad (w \in \pi_1(U \cap U'))$$

erzeugte Normalteiler.

(4) *Es ist $\pi_1(X) \simeq (\pi_1(U) * \pi_1(U'))/N$.*

Beweis. Aussage (1) ist wegen $j \circ i = j' \circ i'$ klar. Aussage (4) folgt sofort aus (2) und (3) mit dem Homomorphiesatz für Gruppen. (EXKURS: Homomorphiesatz.)

(2) Sei $\gamma\colon [0,1] \to X$ eine Schlaufe mit Basispunkt x_0. Zu jedem $s \in [0,1]$ gibt es eine Umgebung V_s in $[0,1]$ mit $\gamma(V_s) \subseteq U$ oder $\gamma(V_s) \subseteq U'$. Dabei kann man V_s als offenes Intervall annehmen, dessen Abschluss nach U bzw. U' abgebildet wird. Da $[0,1]$ kompakt ist, reichen endlich viele solcher Intervalle, die $[0,1]$ überdecken. Die Endpunkte dieser Intervalle ergeben dann eine Partition $0 = s_0 < s_1 < \ldots < s_m = 1$, so dass $\gamma([s_{i-1}, s_i]) \subseteq U$ oder $\gamma([s_{i-1}, s_i]) \subseteq U'$ gilt. Sei U_i eine der Mengen U oder U' mit $\gamma([s_{i-1}, s_i]) \subseteq U_i$.

Sei γ_i die Einschränkung von γ auf $[s_{i-1}, s_i]$ für jedes $i = 1, \ldots, m$. Es ist dann $\gamma = \gamma_1 * \ldots * \gamma_m$. Da $U_i \cap U_{i+1}$ wegzusammenhängend ist, gibt es einen Weg β_i in $U_i \cap U_{i+1}$ von x_0 nach $\gamma(s_i) \in U_i \cap U_{i+1}$. Die Schlaufe

$$(\gamma_1 * \overline{\beta}_1) * (\beta_1 * \gamma_2 * \overline{\beta}_2) * (\beta_2 * \gamma_3 * \overline{\beta}_2) * \ldots * (\beta_{m-1} * \gamma_m)$$

ist homotop zu γ und ist eine Komposition von Schlaufen (jeweils innerhalb der Klammern), die in U_i liegen. Also liegt $[\gamma]$ im Bild von Φ.

(3) Wegen (1) liegen die Elemente $i_*(w)i'_*(w)^{-1}$ $(w \in \pi_1(U \cap U')$ in N. Dass Kern Φ der kleinste Normalteiler N ist, der diese Elemente enthält, ist nur aufwändig zu zeigen. Aus Zeitgründen zeigen wir nur die Strategie: Sei $[\gamma] \in \pi_1(X)$. Ein formales Produkt $[\gamma_1] \cdots [\gamma_k]$ heißt *Faktorisierung* von $[\gamma]$, wenn jedes γ_i eine Schlaufe in $U_i = U$ oder $U_i = U'$ ist mit Basispunkt x_0, und $[\gamma_i] \in \pi_1(U_i)$ die Homotopieklasse ist, und γ homotop zu $\gamma_1 * \ldots * \gamma_k$ ist. Ein Faktorisierung von $[\gamma]$ ist also ein Wort (möglicherweise nicht reduziert) in $\pi_1(U)*\pi_1(U')$. Der Beweis von (2) hat gezeigt, dass jedes $[\gamma]$ eine Faktorisierung besitzt. Wir nennen zwei Faktorisierungen von $[\gamma]$ *äquivalent*, wenn sie durch eine endliche Folge von Transformationen des folgendes Typs oder ihrer Inverse auseinander hervorgehen:

- Gehören zwei aufeinanderfolgende Faktoren $[\gamma_i]$ und $[\gamma_{i+1}]$ beide gleichzeitig zum selben $\pi_1(U_i)$, so wird aus $[\gamma_i][\gamma_{i+1}]$ ein einziger Faktor $[\gamma_i * \gamma_{i+1}]$;
- Ist γ_i eine Schlaufe in $U \cap U'$, so fasse $[\gamma_i] \in \pi_1(U)$ als Element in $\pi_1(U')$ auf, bzw. umgekehrt.

Äquivalente Faktorisierung ergeben nach der Definition von N also dasselbe Element in der Faktorgruppe $(\pi_1(U) * \pi_1(U'))/N$. Es ist zu zeigen, dass je zwei Faktorisierungen von $[\gamma]$ äquivalent sind, denn dann folgt, dass die durch Φ induzierte Abbildung $(\pi_1(U) * \pi_1(U'))/N \to \pi_1(X)$ injektiv ist, d. h. N ist genau der Kern von Φ. $\square$

KOROLLAR 8.4 (Wedge-Summen). *Seien* (X, x_0) *und* (X', x'_0) *punktierte topologische Räume. Sei* $X \vee X'$ *die Wedge-Summe, d. h. die topologische Summe von* X *und* X'*, wobei* x_0 *und* x'_0 *identifiziert werden. Nehme an, dass* x_0 *(bzw.* x'_0*) ein Deformationsretrakt einer offenen Umgebung* V *(bzw.* V'*) in* X *(bzw.* X'*) ist. Dann gilt*

$$\pi_1(X \vee X') \simeq \pi_1(X) * \pi_1(X').$$

BEWEIS. Seien $U \overset{def}{=} X \vee V'$ und $U' \overset{def}{=} V \vee X'$. Dann ist X ein Deformationsretrakt seiner offenen Umgebung U und X' ist ein Deformationsretrakt seiner offenen Umgebung U'. Es ist $U \cap U' = V \cap V'$, was zu einem Punkt deformationsretrahiert. Außerdem ist $X \vee X' = U \cup U'$. Es folgt mit dem Satz von Seifert und van Kampen, dass

$$\pi_1(X \vee X') = \pi_1(U \cup U') \simeq \pi_1(U) * \pi_1(U')/1 \simeq \pi_1(X) * \pi_1(X').$$

□

BEISPIEL 8.5. Es ist $\pi_1(S^1 \vee S^1) \simeq \mathbb{Z} * \mathbb{Z}$.

9. Überlagerungen

DEFINITION 9.1. Sei X ein topologischer Raum. Ein topologischer Raum $\widetilde{X}$ zusammen mit einer stetigen Abbildung $p\colon \widetilde{X} \to X$ heißt *Überlagerung* von X, wenn folgende Eigenschaft gilt:

- Es gibt eine offene Überdeckung $(U_i)_{i \in I}$ von X, so dass sich für jedes $i \in I$ das Urbild $p^{-1}(U_i) \subseteq \widetilde{X}$ in eine disjunkte Vereinigung von offenen Mengen zerlegt, die alle jeweils durch p homöomorph auf U_i abgebildet werden.

Beachte: Für die Abbildung $p = \exp\colon \mathbb{R} \to S^1$ war dies gerade die Eigenschaft (d) aus dem Beweis von Satz 4.1. Man beachte, dass nicht gefordert wird, dass $p^{-1}(U_i)$ nicht-leer sein muss, d. h. p muss nicht notwendig surjektiv sein.

PROPOSITION 9.2. *Eine Überlagerung* $p\colon \widetilde{X} \to X$ *ist offen.*

BEWEIS. Entfällt aus Zeitgründen. □

DEFINITION 9.3. Gegeben sei eine Überlagerung $p\colon \widetilde{X} \to X$. Ist $f\colon Y \to X$ eine stetige Abbildung, so heißt eine stetige Abbildung $\widetilde{f}\colon Y \to \widetilde{X}$ eine *Hochhebung* von f, falls $p \circ \widetilde{f} = f$ gilt.

PROPOSITION 9.4 (Homotopiehochhebungseigenschaft). *Gegeben sei eine Überlagerung* $p\colon \widetilde{X} \to X$ *und eine Homotopie* $f_t\colon Y \to X$*, sowie eine Hochhebung* $\widetilde{f}_0\colon Y \to \widetilde{X}$ *von* f_0*. Dann gibt es genau eine Homotopie* $\widetilde{f}_t\colon Y \to \widetilde{X}$*, die die Homotopie* f_t *hochhebt und für* $t = 0$ *mit dem gegeben* $\widetilde{f}_0$ *übereinstimmt.*

BEWEIS. Dies ist die Eigenschaft (c) aus dem Beweis von Satz 4.1. Der Beweis geht in der allgemeinen Situation genau wie dort. □

Spezialfälle:

- Besteht Y aus einem Punkt, so ist dies gerade die *Hochhebungseigenschaft für Wege*, die Eigenschaft (a) aus dem Beweis von Satz 4.1.
- Für $Y = [0, 1]$ bekommt man die *Hochhebungseigenschaften für Homotopien von Wegen*, also die Eigenschaft (b) aus dem Beweis von Satz 4.1.

Bezeichne im folgenden $p\colon \widetilde{X} \to X$ eine Überlagerung. Sei $x_0 \in X$ ein Basispunkt, so sei $\widetilde{x}_0 \in \widetilde{X}$ ein Urbild unter p.

PROPOSITION 9.5. (1) *Der induzierte Homomorphismus* $p_*\colon \pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{x}_0) \to \pi_1(X, x_0)$ *ist injektiv.*

(2) *Das Bild* $p_*(\pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{x}_0))$ *in* $\pi_1(X, x_0)$ *besteht aus den Homotopieklassen von Schlaufen mit Basispunkt* x_0*, deren Hochhebungen, die in* $\widetilde{x}_0$ *starten, Schlaufen sind.*

BEWEIS. (1) Sei $[\beta] \in \pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{x}_0)$ mit $p_*([\beta]) = 1$. D. h. es ist $p \circ \beta$ homotop zur konstanten Schlaufe in x_0. Wegen der Eindeutigkeit von Hochhebungen von Homotopien ist dann $\beta = \widetilde{\gamma}$ homotop zur konstanten Schlaufe, also $[\beta] = 1$.

(2) Ist $[\gamma]$ im Bild von p_*, dann gibt es eine Schlaufe β mit Basispunkt $\widetilde{x}_0$ und $p \circ \beta \simeq \gamma$. Da $p \circ \widetilde{\gamma} = \gamma$ gilt, folgt $\beta \simeq \widetilde{\gamma}$, also ist auch $\widetilde{\gamma}$ eine Schlaufe. Umgekehrt, ist γ eine Schlaufe mit Basispunkt x_0, so dass auch $\widetilde{\gamma}$ eine Schlaufe ist, so ist offenbar $[\gamma] = p_*([\widetilde{\gamma}])$. □

DEFINITION 9.6. Die Untergruppe $p_*(\pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{x}_0))$ von $\pi_1(X, x_0)$ heißt die *charakteristische Untergruppe* der Überlagerung $p\colon (\widetilde{X}, \widetilde{x}_0) \to (X, x_0)$.

Sei $x \in X$. Dann ist die Kardinalität der Menge $p^{-1}(x)$ lokal konstant. Ist X zusammenhängend, so ist die Anzahl konstant für alle $x \in X$. Diese Anzahl wird die *Blätterzahl* genannt. (Sie kann unendlich sein.)

PROPOSITION 9.7. *Die Blätterzahl einer Überlagerung* $p\colon (\widetilde{X}, \widetilde{x}_0) \to (X, x_0)$*, wobei* X *und* $\widetilde{X}$ *wegzusammenhängend sind, ist gleich dem Index der Untergruppe* $p_*(\pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{x}_0))$ *in* $\pi_1(X, x_0)$.

BEWEIS. Entfällt aus Zeitgründen. □

PROPOSITION 9.8 (Hochhebungskriterium). *Sei eine Überlagerung* $p\colon (\widetilde{X}, \widetilde{x}_0) \to (X, x_0)$ *und eine stetige Abbildung* $f\colon (Y, y_0) \to (X, x_0)$ *gegeben, wobei* Y *wegzusammenhängend und lokal wegzusammenhängend ist. Dann sind äquivalent:*

(1) *Es existiert eine Hochhebung* $\widetilde{f}\colon (Y, y_0) \to (\widetilde{X}, \widetilde{x}_0)$.

(2) $f_*(\pi_1(Y, y_0)) \subseteq p_*(\pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{x}_0))$.

BEWEIS. (1)⇒(2): Es ist $f_* = p_* \circ \widetilde{f}_*$, also $f_*([\gamma]) = p_*([\widetilde{f} \circ \gamma])$.

(2)⇒(1): Sei $y \in Y$. Sei γ ein Weg in Y von y_0 nach y. Es ist $f \circ \gamma$ ein Weg in X, der in x_0 startet. Dieser hat eine eindeutige Hochhebung $\widetilde{f \circ \gamma}$, ein Weg, der in $\widetilde{x}_0$ startet. Definiere $\widetilde{f}(y) \overset{def}{=} \widetilde{f \circ \gamma}(1)$. Dies ist wohldefiniert:

Denn sei γ' ein weiterer Weg in Y von y_0 nach y. Dann ist $(f \circ \gamma') * (\overline{f \circ \gamma})$ eine Schlaufe β_0 mit Basispunkt x_0 mit $[\beta_0] \in f_*(\pi_1(Y, y_0)) \subseteq p_*(\pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{x}_0))$. Das heißt, es gibt eine Homotopie β_t von β_0 zu einer Schlaufe β_1, die zu einer Schlaufe $\widetilde{\beta}_1$ mit Basispunkt $\widetilde{x}_0$ hochgehoben werden kann. Es können dann alle Homotopien β_t zu Homotopien $\widetilde{\beta}_t$ hochgehoben werden. Da $\widetilde{\beta}_1$ eine Schlaufe mit Basispunkt $\widetilde{x}_0$ ist, gilt dies auch für $\widetilde{\beta}_0$. Wegen der Eindeutigkeit der Hochhebung von Wegen ist $\widetilde{f \circ \gamma'}$ die erste Hälfte von $\widetilde{\beta}_0$, und die zweite Hälfte von $\widetilde{\beta}_0$ ist $\widetilde{f \circ \gamma}$ rückwärts durchlaufen; der gemeinsame Mittelpunt ist $\widetilde{f \circ \gamma}(1) = \widetilde{f \circ \gamma'}(1)$. Also ist dieser Wert unabhängig von der Wahl von γ.

$\widetilde{f}$ ist stetig: Hier geht der lokale Wegzusammenhang von Y ein. Sei $y \in Y$, und sei V eine offene Umgebung von $\widetilde{f}(y)$. Wegen 9.2 kann man ohne Einschränkung annehmen, dass V so klein ist, dass $p : V \to p(V)$ ein Homöomorphismus auf die offene Umgebung $p(V)$ von $f(y)$ ist. Wähle eine wegzusammenhängende offene Umgebung W von y in Y, so dass $f(W) \subseteq p(V)$ gilt (da f stetig und Y lokal wegzusammenhängend ist). Sei γ ein Weg von y_0 nach y. Sei $y' \in W$, und β ein Weg von y nach y' in W. Dann ist der Weg $(f \circ \gamma) * (f \circ \beta)$ in X, und ergibt eine Hochhebung $\widetilde{f \circ \gamma} * \widetilde{f \circ \beta}$ in $\widetilde{X}$, wobei $\widetilde{f \circ \beta} = p^{-1} \circ f \circ \beta$ mit dem Umkehrhomöomorphismus $p^{-1} : p(V) \to V$ ist. Es folgt $\widetilde{f}(W) = p^{-1}(f(W)) \subseteq V$. $\square$

Proposition 9.9 (Eindeutigkeit der Hochhebung). *Sei $f\colon Y \to X$ stetig mit zwei Hochhebungen $\widetilde{f}_1, \widetilde{f}_2\colon \widetilde{X} \to X$, die in einem Punkt von Y übereinstimmen, wobei Y zusammenhängend ist. Dann gilt $\widetilde{f}_1 = \widetilde{f}_2$.*

Beweis. Sei $y \in Y$. Sei U eine offene Umgebung von $f(y)$ in X, so dass $p^{-1}(U)$ eine disjunkte Vereinigung von offenen Menge $\widetilde{U}_i$ ist, die durch p homöomorph auf U abgebildet werden. Sei etwa $\widetilde{f}_1(y) \in \widetilde{U}_1$ und $\widetilde{f}_2(y) \in \widetilde{U}_2$. Es gibt eine Umgebung W von y mit $\widetilde{f}_1(W) \subseteq \widetilde{U}_1$ und $\widetilde{f}_2(W) \subseteq \widetilde{U}_2$. Falls $\widetilde{f}_1(y) \neq \widetilde{f}_2(y)$, sind $\widetilde{U}_1$ und $\widetilde{U}_2$ ungleich, also disjunkt, und deshalb durchweg $\widetilde{f}_1 \neq \widetilde{f}_2$ auf W. Falls jedoch $\widetilde{f}_1(y) = \widetilde{f}_2(y)$, so ist $\widetilde{U}_1 = \widetilde{U}_2$ und es folgt $\widetilde{f}_1 = \widetilde{f}_2$ auf W. Da Y zusammenhängend ist, und weil $\widetilde{f}_1$ und $\widetilde{f}_2$ in einem Punkt übereinstimmen, folgt $\widetilde{f}_1 = \widetilde{f}_2$ auf ganz Y. $\square$

9.10. Wir wollen eine "Galois-Korrespondenz" zeigen, eine Bijektion zwischen den wegzusammenhängenden Überlagerungen eines (lokal) wegzusammenhängenden Raumes X und den Untergruppen der Fundamentalgruppe $\pi_1(X)$. Dabei soll einer Überlagerung $p\colon (\widetilde{X}, \widetilde{x}_0) \to (X, x_0)$ die charakteristische Untergruppe $p_*(\pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{x}_0))$ von $\pi_1(X, x_0)$ zugeordnet werden. Soll dies gelten, so muss zumindest eine Überlagerung $p\colon (\widetilde{X}, \widetilde{x}_0) \to (X, x_0)$ zur trivialen Untergruppe von $\pi_1(X, x_0)$ existieren. Wegen der Injektivität von p_* ist also $\pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{x}_0))$ trivial, d. h. es ist $\widetilde{X}$ einfach zusammenhängend.

Eine notwendige Bedingung dafür ist sicherlich folgende: Jeder Punkt $x \in X$ hat eine Umgebung U, so dass die inklusionsinduzierte Abbildung

$\pi_1(U,x) \to \pi_1(X,x)$ trivial ist. Denn es gibt eine Umgebung U von x mit einer Hochhebung $\widetilde{U}$, die durch p homöomorph auf U abgebildet wird. Jede Schlaufe in U lässt sich hochheben zu einer Schlaufe in $\widetilde{U}$; diese ist in $\widetilde{X}$ aber nullhomotop. Komponiert man diese Nullhomotopie mit p, so ergibt sich für die ursprüngliche Schlaufe in U eine Nullhomotopie in X.

Gilt dies, so sagt man, dass X *semilokal einfach zusammenhängend ist.*

Wir nehmen diese notwendige Bedingung nun an. Sei also X

- wegzusammenhängend,
- lokal wegzusammenhängend, und
- semilokal einfach zusammenhängend.

Wir konstruieren nun einen einfach zusammenhängenden Überlagerungsraum $\widetilde{X}$.

Motivation: Angenommen $p\colon (\widetilde{X},\widetilde{x}_0) \to (X,x_0)$ ist eine Überlagerung, mit $\widetilde{X}$ einfach zusammenhängend. Ist $\widetilde{x} \in \widetilde{X}$, so gibt es genau eine Homotopieklasse von Wegen in $\widetilde{X}$ von $\widetilde{x}_0$ nach $\widetilde{x}$. Wegen der eindeutigen Hochhebung von Homotopien sind Homotopieklassen von Wegen in $\widetilde{X}$, die in $\widetilde{x}_0$ starten, dasselbe wie Homotopieklassen von Wegen in X, die in x_0 starten. Wir definieren also:

$$\widetilde{X} \overset{def}{=} \{[\gamma] \mid \gamma \text{ Weg in } X, \text{ der in } x_0 \text{ startet}\}.$$

Auch hier werden wieder Homotopien relativ Anfangs- und Endpunkt betrachtet. Definiere

$$p\colon \widetilde{X} \to X,\ [\gamma] \mapsto \gamma(1).$$

Es ist p offenbar wohldefiniert und surjektiv.

$$\mathcal{B} \overset{def}{=} \{U \subseteq X \mid U \text{ wegzshgd.}, \ \pi_1(U) \to \pi_1(X) \text{ trivial}\}$$

ist eine Basis der Topologie auf X (einfach). Ist $U \in \mathcal{B}$ und γ ein Weg in X von x_0 zu einem Punkt in U, so sei

$$U_{[\gamma]} \overset{def}{=} \{[\gamma * \eta] \mid \eta \text{ Weg in } U \text{ mit } \eta(0) = \gamma(1)\} \subseteq \widetilde{X}.$$

Es ist $p\colon U_{[\gamma]} \to U$ surjektiv (da U wegzshgd.) und injektiv (da $\pi_1(U) \to \pi_1(X)$ trivial). Man zeigt, dass die $U_{[\gamma]}$ eine Basis einer Topologie auf $\widetilde{X}$ bilden, und es ist $p\colon U_{[\gamma]} \to U$ ein Homöomorphismus, denn p liefert eine Bijektion zwischen den $V \subseteq U \in \mathcal{B}$ und $V_{[\gamma]} \subseteq U_{[\gamma]}$, denn $V_{[\gamma]} = p^{-1}(V) \cap U_{[\gamma]}$. Es folgt weiter, dass $p\colon \widetilde{X} \to X$ stetig ist. Außerdem ist für $U \in \mathcal{B}$

$$p^{-1}(U) = \bigcup_{[\gamma]} U_{[\gamma]},$$

und dies liefert eine Partition, denn aus $[\beta] \in U_{[\gamma]}$ folgt $U_{[\beta]} = U_{[\gamma]}$.

Es ist noch zu zeigen, dass $\widetilde{X}$ einfach zusammenhängend ist. Sei dazu $[\gamma] \in \widetilde{X}$, sei

$$\gamma_t(s) \overset{def}{=} \begin{cases} \gamma(s) & 0 \le s \le t; \\ \gamma(t) & t \le s \le 1. \end{cases}$$

Es ist $\Gamma\colon [0,1] \to \widetilde{X}$, $t \mapsto [\gamma_t]$ ein Weg, der in der Homotopieklasse $[x_0]$ des konstanten Weges in x_0 started und in $[\gamma] = [\gamma_1]$ endet. Also ist $\widetilde{X}$ wegzusammenhängend. Da p_* injektiv ist, genügt es, $p_*(\pi_1(\widetilde{X}, [x_0])) = 0$ zu zeigen. Sei also $[\gamma]$ in dieser charakteristischen Gruppe. Es gilt $p \circ \Gamma(t) = p([\gamma_t]) = \gamma_t(1) = \gamma(t)$, also ist Γ eine Hochhebung von Γ, also eine Schlaufe. Also ist $[x_0] = \Gamma(0) = \Gamma(1) = [\gamma]$, also ist γ nullhomotop.

Wir haben also gezeigt:

Satz 9.11. *Sei X ein topologischer Raum, der*

- *wegzusammenhängend,*
- *lokal wegzusammenhängend, und*
- *semilokal einfach zusammenhängend*

ist. Dann gibt es eine Überlagerung $p\colon \widetilde{X} \to X$, wobei $\widetilde{X}$ einfach zusammenhängend ist.

Proposition 9.12. *Sei X ein topologischer Raum, der*

- *wegzusammenhängend,*
- *lokal wegzusammenhängend, und*
- *semilokal einfach zusammenhängend*

ist. Sei $x_0 \in X$ ein Basispunkt und $H \subseteq \pi_1(X, x_0)$ eine Untergruppe. Dann gibt es eine Überlagerung $p\colon (X_H, x_H) \to (X, x_0)$ mit charakteristischer Untergruppe H und wegzusammenhängendem $\widetilde{X}$.

Beweis. Sei $p\colon (\widetilde{X}, \widetilde{x}_0) \to (X, x_0)$ eine Überlagerung mit $\widetilde{X}$ einfach zusammenhängend. Für $[\gamma]$, $[\gamma'] \in \widetilde{X}$ definiere $[\gamma] \sim [\gamma']$, falls $\gamma(1) = \gamma'(1)$ gilt und $[\gamma * \overline{\gamma'}] \in H$ gilt. Aus der Untergruppeneigenschaft von H folgt, dass $\sim$ eine Äquivalenzrelation ist. Sei X_H der Quotientenraum $\widetilde{X}/\sim$. Mit $\widetilde{X}$ ist auch X_H wegzusammenhängend. Sei $p_H\colon X_H \to X$ induziert durch $[\gamma] \mapsto \gamma(1)$. Man zeigt dann, dass dies eine Überlagerung mit charakteristischer Untergruppe H definiert. $\square$

Definition 9.13. Seien $p_1\colon (\widetilde{X}_1, \widetilde{x}_1) \to (X, x_0)$ und $p_2\colon (\widetilde{X}_2, \widetilde{x}_2) \to (X, x_0)$ Überlagerungen von X. Ein Homöomorphismus $f\colon \widetilde{X}_1 \to \widetilde{X}_2$ mit $f(\widetilde{x}_1) = \widetilde{x}_2$ heißt *Isomorphismus von Überlagungen*, wenn $p_2 \circ f = p_1$ und $f(\widetilde{x}_1) = \widetilde{x}_2$ gilt. (Gibt auch eine Version ohne Basispunkte.) Gibt es einen solchen, so heißen entsprechend die Überlagerungen isomorph.

Proposition 9.14. *Sei X wegzusammenhängend und lokal wegzusammenhängend, und seien $p_1\colon (\widetilde{X}_1, \widetilde{x}_1) \to (X, x_0)$ und $p_2\colon (\widetilde{X}_2, \widetilde{x}_2) \to (X, x_0)$ Überlagerungen von X. Dann sind äquivalent:*

(1) *Es gibt einen Überlagerungsisomorphismus $f\colon \widetilde{X}_1 \to \widetilde{X}_2$.*
(2) *Es gilt $(p_1)_*(\pi_1(\widetilde{X}_1, \widetilde{x}_1)) = (p_2)_*(\pi_1(\widetilde{X}_2, \widetilde{x}_2))$.*

Beweis. Gilt (1), so folgt aus $p_1 = p_2 \circ f$ und $p_2 = p_1 \circ f^{-1}$ die Gleichheit der charakteristischen Untergruppen. Umgekehrt gelte (2). Man kann p_1

hochheben zu $\widetilde{p}_1 \colon (\widetilde{X}_1, \widetilde{x}_1) \to (\widetilde{X}_2, \widetilde{x}_2)$ mit $p_2 \circ \widetilde{p}_1 = p_1$. Analog findet man ein $\widetilde{p}_2$ in die umgekehrte Richtung. Wegen der Eindeutigkeit der Hochhebungen folgt dann $\widetilde{p}_2 \circ \widetilde{p}_1 = 1_{\widetilde{X}_1}$ sowie $\widetilde{p}_1 \circ \widetilde{p}_2 = 1_{\widetilde{X}_2}$. □

Es folgt:

Satz 9.15. *Sei X ein topologischer Raum, der*

- *wegzusammenhängend,*
- *lokal wegzusammenhängend, und*
- *semilokal einfach zusammenhängend*

ist, und sei $x_0 \in X$ ein Basispunkt. Dann gibt es eine Bijektion zwischen der Menge der Isomorphieklassen von Überlagerungen $p\colon (\widetilde{X}, \widetilde{x}_0) \to (X, x_0)$, wobei $\widetilde{X}$ wegzusammenhängend ist, und der Menge der Untergruppen $H \subseteq \pi_1(X, x_0)$. Hierbei wird jeder Überlagerung ihre charakteristische Untergruppe zugeordnet.

Definition 9.16. Sei X wegzusammenhängend und lokal wegzusammenhängend. Eine Überlagerung $p\colon \widetilde{X} \to X$, wobei $\widetilde{X}$ einfach zusammenhängend ist, heißt *universelle Überlagerung* von X.

Eine universelle Überlagerung ist bis auf Isomorphie von Überlagerungen eindeutig. Aus dem Hochhebungskriterium folgt:

Korollar 9.17. *Sei $p\colon \widetilde{X} \to X$ universelle Überlagerung des wegzusammenhängenden und lokal wegzusammenhängenden Raums X. Dann ist $\widetilde{X}$ eine Überlagerung jeder Überlagerung von X.*

Bemerkung 9.18 (Decktransformationen). Sei $p\colon (\widetilde{X}, \widetilde{x}_0) \to (X, x_0)$ eine wegzusammenhängende Überlagerung des wegzusammenhängenden, lokal wegzusammenhängenden Raums X. Sei $G(\widetilde{X})$ die Gruppe aller *Decktransformationen*, das sind die Überlagerungsisomorphismen $f\colon (\widetilde{X}, \widetilde{x}_0) \to (\widetilde{X}, \widetilde{x}_0)$. Sei $H \subseteq \pi_1(X, x_0)$ die charakteristische Untergruppe dieser Überlagerung. Ist H ein Normalteiler, so ist $G(\widetilde{X}) \simeq \pi_1(X, x_0)/H$. Insbesondere: Ist $p\colon \widetilde{X} \to X$ universelle Überlagerung, so ist $G(\widetilde{X}) \simeq \pi_1(X, x_0)$.

Beispiel 9.19. FOLIE: Einige Überlagerungen von $S^1 \vee S^1$ und deren charakteristische Untergruppen.

10. (Höhere) Homotopiegruppen

11. Singuläre Homologie

12. Homotopieinvarianz

13. Erste Homologie und Fundamentalgruppe

Literaturverzeichnis