Vorlesung Endlichdimensionale Algebren

(Sommersemester 2013)

Dirk Kussin

Fakultät für Mathematik, TU Chemnitz
E-mail address: dirk.kussin@mathematik.tu-chemnitz.de

Inhaltsverzeichnis

KAPITEL 1

Grundlagen

1.1. Definition und Beispiele von Ringen

1.1.1. Ringe.

1.1.1. Unter einem Ring verstehen wir immer einen assoziativen Ring (d. h. $+$ und $\cdot$ sind assoziativ) mit Einselement. Ein *Ring* ist eine Menge R mit zwei Verknüpfungen $+ : R \times R \longrightarrow R$ ("Addition") und $\cdot : R \times R \longrightarrow R$ ("Multiplikation"), wobei $(R, +)$ eine abelsche Gruppe ist und $(R, \cdot)$ eine Halbgruppe mit Einselement 1_R (man sagt auch: Monoid). Ferner sind Addition und Multiplikation durch die Distributivgesetzte miteinander verbunden:

$$r \cdot (s + t) = r \cdot s + r \cdot t, \;\; (r + s) \cdot t = r \cdot t + s \cdot t \;\text{ für alle } r,\, s,\, t \in R.$$

Hierbei hat man schon die Konvention verwendet, dass $\cdot$ stärker als $+$ bindet, um Klammern zu sparen. Eine weitere Konvention ist, dass man häufig auch rs statt $r \cdot s$ schreibt. Ein Ring R heißt *kommutativ*, falls $rs = sr$ gilt für alle $r,\, s \in R$.

Bemerkung 1.1.2 (Monoide). Wie bereits oben angedeutet, ist für einen Ring R die multiplikative Struktur $(R, \cdot)$ eine Halbgruppe mit Einselement.

Eine Halbgruppe G mit neutralem Element e (häufig auch Einselement genannt), nennt man auch *Monoid*. *Halbgruppe* bedeutet, dass man eine Verknüpfung $\cdot : G \times G \longrightarrow G$, $(g, h) \mapsto g \cdot h = gh$ hat, die assoziativ ist.

Sind G und H Monoide, so ist eine Abbildung $f : G \longrightarrow H$ ein Monoidhomomorphismus, falls $f(gg') = f(g)f(g')$ für alle $g,\, g' \in G$ gilt und $f(e_G) = e_H$ gilt.

1.1.3. Beispiele für Ringe sind aus den ersten Semestern schon viele bekannt:

- Körper. Also insbesondere $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, endliche Körper, $\mathbb{C}(T)$, Körpererweiterungen von $\mathbb{Q}$ wie $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$ etc. Körper sind Beispiele für kommutative Ringe.
- Verzichtet man bei Körpern auf die Kommutativität (der Multiplikation), so hat man Schiefkörper (auch: Divisionsalgebren). Als Beispiel hat man den Schiefkörper der Hamiltonschen Quaternionen $\mathbb{H}$.
- Viele Ringe tauchen als Endomorphismenringe auf: Ist V ein K-Vektorraum (über dem Körper K); so ist $R = \mathrm{End}_K(V)$ ein Ring; dieser ist im allgemeinen nicht kommutativ. (Er ist genau dann kommutativ, wenn $\dim_K(V) = 1$ gilt.)
- Eng verknüpft mit vorherigem Beispiel sind die Matrizenringe: Ist K ein Körper, so ist $R = \mathrm{M}_n(K)$ (quadratische $n \times n$-Matrizen) ein Ring, der nur im Fall $n = 1$ kommutativ ist. Dies lässt sich verallgemeinern. Ist R ein Ring, so ist $M_n(R)$ ein Ring (wobei Matrizenaddition und -multiplikation wie über einem Körper definiert werden; man beachte, dass man in kanonischer Weise Skalare aus R von links und von rechts mit Matrizen multiplizieren kann).
- Polynomringe. Sei R ein Ring. Dann betrachtet man den Ring $R[X]$ der Polynome in einer Unbestimmten X. Hierbei soll $rX = Xr$ gelten für alle $r \in R$, d. h. X ist eine zentrale Unbestimmte.

- Eine weitere interessante Klasse von Ringen sind sogenannte Gruppenringe (oder allgemeiner, Monoidringe): Sei G eine Gruppe (oder etwas allgemeiner: ein Monoid) und sei R ein Ring. Sei
$$RG = \{\varphi : G \longrightarrow R \mid \varphi(x) = 0 \text{ für fast alle } x \in G\}.$$
Man definiert Addition und Multiplikation durch $(\varphi + \psi)(x) = \varphi(x) + \psi(x)$ für alle $x \in G$ bzw.
$$(\varphi\psi)(x) = \sum_{y,\,z} \varphi(y)\psi(z),$$
wobei hier über alle Paare $(y, z) \in G \times G$ mit $yz = x$ summiert wird; nur endlich viele Summanden $\varphi(y)\psi(z)$ sind $\neq 0$. Es heißt RG die Gruppenalgebra von G über R (im allgemeinen Fall: Monoidalgebra). Man kann Elemente in RG auch als formale Summen $\sum_{x \in G} xa_x$ (mit Koeffizienten (auf der rechten Seite) $a_x \in R$, fast alle $= 0$; eine solche Summe ist eindeutig durch ihre Koeffizienten bestimmt) schreiben; für die Multiplikation gilt $(ya_y)(zb_z) = (yz)(a_yb_z)$. (Man formuliere Addition und Multiplikation in dieser Schreibweise.)
- Sind R und S Ringe, so ist auch das Produkt $R \times S$ mit komponentenweisen Verknüpfungen ein Ring mit Einselement $(1_R, 1_S)$.

Übung 1.1.4. Sei G ein Monoid und R ein Ring. Man zeige, dass RG mit der oben definierten Addition und Multiplikation ein Ring ist.

Viele weitere Beispiele von Ringen treten in der Analysis auf, etwa als Ringe von stetigen, von differenzierbaren oder von holomorphen Funktionen etc. auf.

1.1.2. Moduln.

1.1.5. In der Linearen Algebra studiert man Vektorräume und lineare Abbildungen über Körpern. Ähnliche mathematische Gegenstände betrachtet man über beliebigen Ringen. Dies führt zum Begriff eines Moduls: Ein R-Modul M ist eine Menge mit einer Verknüpfung $+ : M \times M \longrightarrow M$, so dass $(M, +)$ eine abelsche Gruppe ist, und mit einer Abbildung $R \times M \longrightarrow M$, $(r, x) \mapsto rx$, so dass folgendes gilt:
$$(r + s)x = rx + sx,\ r(x + y) = rx + ry,\ (rs)x = r(sx),\ 1x = x$$
für alle $r, s \in R, x, y \in M$. Weil hier R von links auf M operiert, hat man genau genommen einen *R-Linksmodul* definiert. Analog definiert man *R-Rechtsmoduln*, mit einer Abbildung $M \times R \longrightarrow M$, $(x, r) \mapsto xr$ und den analogen Rechenregeln
$$x(r + s) = xr + xs,\ (x + y)r = xr + yr,\ x(rs) = (xr)s,\ x = x1$$
Oftmals ist es Geschmackssache, ob man Links- oder Rechtsmoduln betrachtet. (Über kommutativen Ringen spielt die Unterscheidung keine Rolle; daher spricht man dann meist nur von Moduln.) Es ist aber nicht richtig zu sagen, dass Links- und Rechtsmoduln dasselbe sind bzw. dass jeder Linksmodul auch ein Rechtsmodul (und umgekehrt) ist. Es ist aber richtig, dass die Theorie der Linksmoduln analog zur Theorie der Rechtsmoduln verläuft. Wir werden hier meist Rechtsmoduln betrachten, weil dies an einigen Stellen gewisse Vorteile hat.

Ist die Definition eines Moduls völlig analog zu der eines Vektorraums, gilt dies mitnichten für die Theorie der Moduln über einem Ring. Hauptunterschied ist, dass jeder Vektorraum über einem Körper (analog: über einem Schiefkörper) eine Basis besitzt. Dies ist über beliebigen Ringen nur sehr selten der Fall. In der Tat werden wir sehen, dass (Schief-) Körper dadurch ausgezeichnet sind, dass jeder Modul eine Basis besitzt.

Beispiel 1.1.6. Ein $\mathbb{Z}$-Modul ist nichts anderes als eine abelsche Gruppe.

1.1.7. Ist R ein Ring mit Multiplikation $\cdot$, so ist R^{op} ein Ring definiert mit $(R^{op}, +) = (R, +)$ und mit der Multiplikation $*$, wobei $r * s \stackrel{def}{=} s \cdot r$ für alle $r, s \in R$.

Übung 1.1.8. Man zeige, dass sich R-Rechtsmoduln und R^{op}-Linksmoduln entsprechen.

1.1.9 (Homomorphismen). Sei R ein Ring und seien M und N zwei R-Rechtsmoduln. Ein *Homomorphismus* (von R-Rechtsmoduln) ist eine Abbildung $f : M \longrightarrow N$ mit

$$f(x+y) = f(x) + f(y) \quad \text{für alle } x,\, y \in M$$

und

$$f(xr) = f(x)r \quad \text{für alle } r \in R,\ x \in M.$$

Häufig nennen wir solche Abbildungen auch (R-) *linear*. Es bezeichne $\mathrm{Hom}_R(M, N)$, oder $\mathrm{Hom}(M_R, N_R)$ die Menge aller R-linearen Abbildungen von M nach N.

1.1.10 (Bezeichnungen von speziellen Homomorphismen). Sei $f : M \longrightarrow N$ ein Homomorphismus von R-Rechtsmoduln. Dann heißt f

Endomorphismus		$M = N$
Monomorphismus		f injektiv
Epimorphismus	$\Leftrightarrow$	f surjektiv
Isomorphismus		f bijektiv
Automorphismus		$M = N$ und f bijektiv.

1.1.11. Die Menge aller Endomorphismen $\mathrm{End}_R(M)$ ist wieder ein Ring. Um zu betonen, dass M ein R-Rechtsmodul ist, schreibt man manchmal auch M_R. Analog, bei Linksmoduln ${}_RM$. Dann benutzt man auch die Schreibweise $\mathrm{End}(M_R)$ bzw. $\mathrm{End}({}_RM)$.

1.1.12. Insbesondere ist R selbst ein R-Rechtsmodul und gleichzeitig auch ein R-Linksmodul. Man hat Isomorphismen von Ringen

$$R \simeq \mathrm{End}(R_R) \quad \text{und} \quad R^{op} \simeq \mathrm{End}({}_RR),$$

(Dies ist einer der Gründe, warum wir hier Rechtsmoduln bevorzugen.) gegeben durch $r \mapsto \lambda_r$, wobei $\lambda_r(x) = rx$ die Linksmultiplikation mit r ist, bzw. $r \mapsto \rho_r$, wobei $\rho_r(x) = xr$ die Rechtsmultiplikation mit r ist.

1.1.3. Algebren.

1.1.13. Sei R ein kommutativer Ring. Ein Ring $(A, +, \cdot)$ heißt (assoziative) R-Algebra, falls es eine Abbildung $A \times R \longrightarrow A$, $(a, r) \mapsto ar$ gibt, so dass A ein R-Rechtsmodul ist und zusätzlich folgende Regeln gelten:

$$(ab)r = a(br) = (ar)b$$

für alle $r \in R$ und $a,\, b \in A$ gelten.

1.1.14. Jeder Ring A ist in natürlicher Weise eine $\mathbb{Z}$-Algebra: Für $n \in \mathbb{Z}$ und $a \in A$ sei

$$an = \begin{cases} a + \cdots + a \quad (n \text{ Summanden}) & n \geq 0 \\ (-a) + \ldots (-a) \quad (-n \text{ Summanden}) & n < 0 \end{cases}$$

Die Theorie der Ringe ist also nichts anderes als die Theorie der $\mathbb{Z}$-Algebren. Setzt man nichts weiter über den kommutativen Ring R voraus (oder nur sehr wenig), so ist also die Theorie der R-Algebren allgemeiner als die Theorie der Ringe. Andererseits ist man oftmals an R-Algebren für spezielle kommutative Ringe R interessiert. Der wichtigste Spezialfall ist hier, wenn $R = K$ ein Körper ist. Gilt $\dim_K(A) < \infty$, so heißt die Algebra A endlichdimensional.

Beispiel 1.1.15. (1) Sei K ein Körper und V ein K-Vektorraum. Dann ist $\mathrm{End}_K(V)$ eine K-Algebra.

(2) Allgemeiner: Sei R ein kommutativer Ring und M ein R-Rechtsmodul. Dann ist $\mathrm{End}(M_R)$ eine R-Algebra.

(3) Sei R ein kommutativer Ring und A eine R-Algebra. Dann ist $\mathrm{M}_n(A)$ eine R-Algebra.

(4) Sind A und B zwei R-Algebren, so auch deren Produkt $A \times B$.

Übung 1.1.16. Sei R ein kommutativer Ring, A eine R-Algebra und G ein Monoid. Dann ist AG eine K-Algebra.

1.1.17 (Ring- und Algebrenhomomorphismen). Seien A und B Ringe. Eine Abbildung $f : A \longrightarrow B$ heißt Ringhomomorphismus, falls für alle x, $y \in A$ gilt

$$f(x+y) = f(x) + f(y) \quad f(xy) = f(x)f(y)$$

sowie

$$f(1_A) = 1_B.$$

Mit anderen Worten: Bezüglich + ist f ein Gruppenhomomorphismus, bezüglich $\cdot$ ist f ein Monoidhomomorphismus. Sind A und B Algebren über dem kommutativen Ring R und ist f zusätzlich ein Homomorphismus von R-Moduln, so heißt f ein (R-) Algebrenhomomorphismus. Ist $R = \mathbb{Z}$, so ist ein Algebrenhomomorphismus nichts anderes als ein Ringhomomorphismus.

Beispiel 1.1.18. Sei A eine R-Algebra. Dann ist $R \longrightarrow A$, $r \mapsto 1_A r$ ein Ringhomomorphismus (sogar ein R-Algebrenhomomorphismus), dessen Bild im Zentrum von A landet. Umgekehrt liefert ein solcher Ringhomomorphismus (A ein Ring), eine R-Algebrenstruktur auf A.

Beispiel 1.1.19. Sei A eine R-Algebra und G ein Monoid mit Einselement e. Für $a \in A$ und $x \in G$ definiere $\sigma(a)(x) = a\delta_{ex}$ (wobei e das Einselement von G ist) und $\xi(x)(y) = \delta_{xy}$. Dies ergibt einen injektiven Algebrenhomomorphismus $\sigma : A \longrightarrow AG$ und einen injektiven Monoidhomomorphismus $\xi : G \longrightarrow AG$.

In der Summenschreibweise: $\sigma(a) = ea$ und $\xi(x) = x1$.

1.1.20. Links- und Rechtsmoduln über einer R-Algebra A sind genau wie für den Ring A definiert. Ein A-Rechtsmodul M ist automatisch auch ein R-Modul durch $xr \overset{def}{=} x(1_A r)$ (für alle $a \in R$ und alle $x \in M$).

1.1.21 (Darstellungen). Sei A eine R-Algebra (über dem kommutativen Ring R. Etwa: $R = K$ ein Körper.). Eine Darstellung von A ist ein R-Algebrenhomomorphismus

$$\varphi : A \longrightarrow \mathrm{End}_R(V) \tag{1.1.1}$$

für einen R-Modul (K-Vektorraum) V. Ist $R = K$ ein Körper, so heißt die Darstellung φ endlichdimensional, falls V_K endlichdimensional ist.

(Genau genommen hat man hier Rechts-Darstellungen definiert.)

Darstellungen von A^{op} und A-Rechtsmoduln sind gleichwertige Konzepte:

Übung 1.1.22. Man zeige, dass jede Darstellung

$$\varphi : A^{op} \longrightarrow \mathrm{End}_R(V) \tag{1.1.2}$$

den R-Modul V in natürlicher Weise zu einen A-Rechtsmodul macht. Umgekehrt liefert jeder A-Rechtsmodul in natürlicher Weise eine Darstellung (1.1.2).

Die Darstellungstheorie endlichdimensionaler Algebren untersucht die Moduln über einer endlichdimensionalen Algebra. Das Konzept der Gruppenalgebra verbindet Darstellungstheorie von Gruppen mit der Dartsellungstheorie endlichdimensionaler Algebren.

Um in dieser Vorlesung nicht ständig zwischen den Begriffen "Ring" und "Algebra" hin- und herzuspringen, werden wir im folgenden immer R-Algebren betrachten, wobei R ein kommutativer Ring ist (was nicht jedesmal gesagt wird). Später werden wir uns der Einfachheit halber auf endlichdimensionale Algebren über einem Körper konzentrieren. Außerdem wird – wenn nichts anderes gesagt wird – das Wort "Modul" immer für "Rechtsmodul" verwendet.

1.2. Unter- und Faktormoduln

Wenn nichts anderes gesagt wird, ist R ein kommutativer Ring.

1.2.1. Sei A eine R-Algebra. Sei M ein A-Modul. Eine Teilmenge $U \subseteq M$ heißt Untermodul, falls die A-Rechtssmodulstrukur von M eine solche auf U induziert. Man hat also folgendes zu verifizieren:

(U0) $U \neq \emptyset$ (gleichwertig: $0 \in U$).
(U1) $x, y \in U \;\Rightarrow\; x + y \in U$; kurz: $U + U \subseteq U$.
(U2) $a \in A, x \in U \;\Rightarrow\; xa \in U$; kurz: $U \cdot A \subseteq U$.

Beispiel 1.2.2. Sei $f : M \longrightarrow N$ ein Homomorphismus von Moduln. Dann ist

$$\mathrm{Kern}(f) = \{x \in M \mid f(x) = 0\}$$

ein Untermodul von M.

Beispiel 1.2.3. Seien N und L Untermoduln des Moduls M. Dann ist $N \cap L$ ein Untermodul von M. Allgemeiner: Sind N_i Untermoduln von M für jedes $i \in I$, so ist auch $\cap_i N_i$ ein Untermodul von M.

1.2.4 (Faktormoduln). Sei A eine R-Algebra, M ein A-Modul und $U \subseteq M$ ein Untermodul. Sei

$$M/U = \{U + x \mid x \in M\}$$

die Menge alle Nebenklassen von U in M. Dies wird selbst wieder ein A-Rechtssmodul durch die Regeln

- $(U + x) + (U + y) \overset{def}{=} U + (x + y)$ $(x, y \in M)$.
- $(U + x)a \overset{def}{=} U + xa$ $(a \in A, x \in M)$.

Bemerkung: Man muss sich davon überzeugen, dass diese Festsetzungen *wohldefiniert* sind. Dies ist aber leicht.

Man bekommt einen kanonischen, surjektiven Homomorphismus $\pi : M \longrightarrow M/U$, $x \mapsto U + x$.

Satz 1.2.5 (Homomorphiesatz für Moduln). *Sei A eine R-Algebra, seien M und N Moduln und $f : M \longrightarrow N$ ein Homomorphismus. Sei U ein Untermodul mit $U \subseteq \mathrm{Kern}(f)$. Dann gibt es genau einen Homomorphismus $\overline{f} : M/U \longrightarrow N$ mit $\overline{f} \circ \pi = f$, wobei $\pi : M \longrightarrow M/U$ die kanonische Surjektion ist. Ferner gilt: $\overline{f}$ ist injektiv genau dann, wenn $U = \mathrm{Kern}(f)$ gilt.*

Beweis. Wie für Gruppen. Man definiert $\overline{f}(U + x) \overset{def}{=} f(x)$; dies ist wegen $U \subseteq \mathrm{Kern}(f)$ wohldefiniert. □

Übung 1.2.6 (Isomorphiesätze). (1) Ist $f : M \longrightarrow N$ ein Epimorphismus von A-Moduln, so gilt $M/\mathrm{Kern}(f) \simeq N$.

(2) Sind K und L Untermoduln von M mit $K \subseteq L$, dann gilt $(M/K)/(L/K) \simeq M/L$.

(3) Seien K und L Untermoduln von M, dann gilt $(L + K)/K \simeq L/(L \cap K)$.

Übung 1.2.7. Sei M ein Modul und N ein Untermodul. Man zeige, dass die Zuordnung $K \mapsto K/N$ eine bijektive Abbildung zwischen der Menge der Untermoduln von M, die N enthalten, und der Menge der Untermoduln von M/N ergibt. Wie sieht die Umkehrabbildung aus?

1.3. Ideale und Faktoralgebren

Wenn nichts anderes gesagt wird, ist R ein kommutativer Ring.

1.3.1. Ideale.

1.3.1. Sei A eine R-Algebra. Sei I ein R-Untermodul des R-Moduls A. Dann heißt I ein *Rechtssideal*, falls $I \cdot A \subseteq I$ gilt, Linkssideal, falls $R \cdot I \subseteq I$ gilt, und (zweiseitiges) Ideal, falls beides gilt.

Ein Rechtsideal ist also nichts anderes als ein A-Untermodul von A_A, ein Linksideal nichts anderes als ein A-Untermodul des A-Linksmoduls ${}_AA$.

Beispiel 1.3.2. (1) Sei $f : A \longrightarrow B$ ein Homomorphismus von R-Algebren. Dann ist der Kern

$$\operatorname{Kern}(f) = \{a \in R \mid f(a) = 0_B\}$$

ein (zweiseitiges) Ideal in A.

(2) Sei $a \in A$. Dann ist aA ein Rechtsideal, Aa ein Linksideal und AaA ein Ideal in A.

(3) Sei X eine Teilmenge von A. Dann ist

$$X \cdot A = \{\sum_{i=1}^{n} x_i a_i \mid n \geq 0,\, a_i \in A,\, x_i \in X\}$$

das kleinste A-Rechtsideal, welches X enthält. Eine analoge Konstruktion hat man für Linksideale.

1.3.2. Faktoralgebren.

1.3.3 (Faktoralgebren). Sei A eine R-Algebra und I ein (zweiseitiges) Ideal in A. Dann ist auf A/I (vgl. 1.2.4) in natürlicher Weise eine R-Algebrenstruktur definiert durch

$$(I + a) \cdot (I + b) \stackrel{def}{=} I + ab$$

für alle a, $b \in A$. Dies ist die Faktoralgebra von A modulo I.

Offenbar ist die kanonische Surjektion $\pi : A \longrightarrow A/I$, $a \mapsto I + a$ ein Homomorphismen von R-Algebren.

Satz 1.3.4 (Homomorphiesatz für Algebren). *Sei $f : A \longrightarrow B$ ein Homomorphismus von R-Algebren, sei I ein Ideal in A mit $I \subseteq \operatorname{Kern}(f)$. Dann gibt es genau einen Algebrenhomomorphismus $\overline{f} : A/I \longrightarrow B$ mit $\overline{f} \circ \pi = f$. Ferner gilt: $\overline{f}$ ist injektiv genau dann, wenn $U = \operatorname{Kern}(f)$ gilt.*

Beweis. Wie für Moduln, vgl. 1.2.5. □

Übung 1.3.5. Sei A eine Algebra und I ein Ideal in A. Man zeige, dass die Zuordnung $I' \mapsto I'/I$ eine Bijektion zwischen der Menge der Rechtsideale (bzw. Linksideale, bzw. Ideale) in A, die I enthalten, und der Menge der Rechtsideale (bzw. Linksideale, bzw. Ideale) in A/I induziert.

1.3.3. Annullatoren.

1.3.6. Sei M ein Modul über der Algebra A. Dann ist die Menge

$$\operatorname{Ann}(M) = \{a \in A \mid xa = 0 \text{ für alle } x \in M\}$$

ein Ideal in A und heißt der Annullator von M.

1.3.7. Sei M ein Modul über der Algebra A und sei I ein Ideal in A mit $I \subseteq \operatorname{Ann}(M)$. Dann ist auf M eine A/I-Modulstruktur definiert durch $x(I + a) \stackrel{def}{=} xa$ für alle $a \in A$ und $x \in M$. (Wegen $I \subseteq \operatorname{Ann}(M)$ ist dies wohldefiniert!)

Beispiel 1.3.8. Sei I ein Ideal in der Algebra A. Dann gilt $\operatorname{Ann}((A/I)_A) = I$.

Übung 1.3.9. Sei I ein Rechtsideal in der Algebra A. Dann ist $\operatorname{Ann}((A/I)_A)$ das größte (zweiseitige) Ideal K mit $K \subseteq I$.

ÜBUNG 1.3.10. Sei A eine R-Algebra, M ein A-Modul und I ein Ideal in A mit $I \subseteq \mathrm{Ann}_A(M)$. Man zeige, dass ein R-Untermodul von M ein A-Untermodul ist genau dann, wenn er ein A/I-Untermodul ist.

1.4. Einfache Moduln

1.4.1. Ein Modul S heißt *einfach*, falls er vom Nullmodul verschieden ist und als einzige Untermoduln 0 und S hat.

BEMERKUNG 1.4.2. Ein Modul $S \neq 0$ ist einfach genau dann, wenn 0 und S die einzigen Faktormoduln von S sind.

BEWEIS. Trivial. □

BEISPIEL 1.4.3. Ein Modul V_D über einem Schiefkörper D (also ein Vektorraum) ist einfach genau dann, wenn $\dim(V_D) = 1$ gilt, also genau dann, wenn $V \simeq D_D$ gilt. In dem Fall gilt $\mathrm{End}(V_D) \simeq D$.

PROPOSITION 1.4.4 (Lemma von Schur). *Sei S ein einfacher Modul. Dann ist* $\mathrm{End}(S)$ *ein Schiefkörper.*

BEWEIS. Es ist zu zeigen, dass jeder Endomorphismus $f \neq 0$ von S ein Isomorphismus ist. Allgemeiner: □

PROPOSITION 1.4.5. *Sei $f : S \longrightarrow S'$ ein Homomorphismus zwischen einfachen Moduln S und S'. Dann gilt $f = 0$, oder f ist ein Isomorphismus.*

BEWEIS. Sei $f \neq 0$. Es ist $\mathrm{Kern}(f)$ ein Untermodul von S. Da S einfach ist und $f \neq 0$ folgt $\mathrm{Kern}(f) = 0$. Also ist f injektiv. Betrachtet man das Bild von f, so folgt analog die Surjektivität von f. □

1.5. Summen und Produkte

1.5.1 (Summe und innere direkte Summe). Sei M ein Modul und seien N und L Untermoduln. Dann ist die Summe

$$N + L = \{x + y \mid x \in N,\, y \in M\}$$

ein Untermodul von M. Die Summe heißt *direkt*, und man schreibt $N + L = N \oplus L$, falls zusätzlich $N \cap L = 0$ gilt, oder gleichbedeutend, falls jedes Element in $N + L$ *eindeutig* in der Form $x + y$ mit $x \in N$ und $y \in L$ schreibbar ist. (Man nennt $N + L$ auch "innere" direkte Summe.)

Allgemeiner kann man auch die Summe $\sum_{i \in I} N_i$ von einer Familie von Untermoduln N_i definieren; dies ist die Menge aller Summen $\sum_i x_i$, wobei fast alle $x_i = 0$ sind, also eine endliche Summe vorliegt.

1.5.2 (Direkte Summanden). Ein Untermodul N von M heißt *direkter Summand*, falls es einen Untermodul N' von M gibt mit $N \oplus N' = M$.

Achtung: Im Gegensatz zur Theorie der Vektorräume muss ein Untermodul kein direkter Summand sein!

Seien M und N Moduln. Etwas allgemeiner nennt man N auch einen direkten Summanden von M, falls es einen Modul N' gibt mit $N \oplus N' \simeq M$.

1.5.3 (Produkt und äußere direkte Summe). Sei I eine Indexmenge, und seien M_i Moduln für jedes $i \in I$. Dann ist das Produkt

$$\prod_{i \in I} M_i = \{(x_i)_{i \in I} \mid x_i \in M_i\}$$

ein Modul, wobei man komponentenweise rechnet. Es ist

$$\bigoplus_{i \in I} M_i = \{(x_i)_{i \in I} \mid x_i \in M_i \text{ und } x_i = 0 \text{ für fast alle } i \in I\}$$

ein Untermodul von $\prod_{i\in I} M_i$ und heisst die (äußere) direkte Summe der Moduln M_i. Offenbar gilt $\bigoplus_{i\in I} M_i = \prod_{i\in I} M_i$ genau dann, wenn $M_i \neq 0$ nur für endlich viele $i \in I$ gilt. Insbesondere gilt also $M \oplus N = M \times N$ für Moduln M und N.

Für jedes $i \in I$ hat man kanonische Injektionen $j_i : M_i \longrightarrow \bigoplus_{i\in I} M_i$ und auch $j_i : M_i \longrightarrow \prod_{i\in I} M_i$, sowie kanonische Projektionen $p_i : \bigoplus_{i\in I} M_i \longrightarrow M_i$ und $p_i : \prod_{i\in I} M_i \longrightarrow M_i$.

Satz 1.5.4 (Universelle Eigenschaft der direkten Summe). *Sei für jedes $i \in I$ ein Homomorphismus $f_i : M_i \longrightarrow N$ von Moduln gegeben. Dann gibt es genau einen Homomorphismus von Moduln $f : \bigoplus_{i\in I} M_i \longrightarrow N$ mit $f \circ j_i = f_i$ für jedes $i \in I$.*

Man schreibt auch $f = \bigoplus_{i\in I} f_i$.

Beweis. Definiere f durch

$$f\big((x_i)_i\big) \overset{def}{=} \sum_{i\in I} f_i(x_i)$$

für alle $(x_i)_i \in \bigoplus_{i\in I} M_i$. Da fast alle $x_i = 0$ sind, werden hier nur endlich viele Summanden $\neq 0$ aufsummiert. Man sieht sofort, dass hierdurch ein Homomorphismus mit den gewünschten Eigenschaften definiert wird. Aus der Eigenschaft $f \circ j_i = f_i$ für alle $i \in I$ folgt (zusammen mit der Homomorphie-Eigenschaft) sofort, dass man f auch so definieren muss. □

Satz 1.5.5 (Universelle Eigenschaft des Produkts). *Sei für jedes $i \in I$ ein Homomorphismus von Moduln $g_i : M \longrightarrow N_i$ gegeben. Dann gibt es genau einen Homomorphismus von Moduln $g : M \longrightarrow \prod_{i\in I} N_i$ mit $p_i \circ g = g_i$ für alle $i \in I$.*

Beweis. Man definiert g durch

$$g(x) = \big(g_i(x)\big)_{i\in I}$$

für jedes $x \in M$. □

1.5.6 (Innere und äußere direkte Summe). Seien N und L Untermoduln des Moduls M. Seien $i_N : N \longrightarrow M$ und $i_L : L \longrightarrow M$ die Inklusionsabbildungen. Dann ist M die innere direkte Summe von N und L, genau dann, wenn $i_N \oplus i_L : N \oplus L \longrightarrow M$ ein Isomorphismus ist.

Entsprechendes gilt für beliebige Indexmengen. Wir werden daher kaum noch zwischen äußeren und inneren direkten Summen unterscheiden.

1.6. Exakte Folgen

1.6.1. Eine Folge von zwei Homomorphismen

$$K \xrightarrow{f} L \xrightarrow{g} M$$

heißt *exakt* (in L), falls $\mathrm{Kern}(g) = \mathrm{Bild}(f)$ gilt. Eine (endliche oder unendliche) Folge von Homomorphismen

$$\cdots \longrightarrow M_{i-2} \xrightarrow{f_{i-2}} M_{i-1} \xrightarrow{f_{i-1}} M_i \xrightarrow{f_i} M_{i+1} \xrightarrow{f_{i+1}} M_{i+2} \longrightarrow \cdots$$

heißt *exakt*, wenn sie exakt in jedem M_i ist.

Beispiel 1.6.2. (1) $0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$ ist exakt genau dann, wenn $M = 0$ ist.
(2) $0 \longrightarrow M \xrightarrow{f} N$ ist exakt genau dann, wenn f ein Monomorphismus ist.
(3) $M \xrightarrow{g} N \longrightarrow 0$ ist exakt genau dann, wenn g ein Epimorphismus ist.
(4) $0 \longrightarrow M \xrightarrow{f} N \longrightarrow 0$ ist exakt genau dann, wenn f ein Isomorphismus ist.
(5) Eine exakte Folge der Form

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} L \longrightarrow 0$$

nennt man auch *kurze exakte Folge*. Dies ist gleichbedeutend mit: f ist Monomorphismus, g ist Epimorphismus, und g induziert $N/f(M) \simeq L$. Insbesondere: Ist K ein Untermodul von M, so hat man eine kurze exakte Folge

$$0 \longrightarrow K \xrightarrow{\subset} M \xrightarrow{\pi} M/K \longrightarrow 0$$

1.6.3 (Aufspaltende Folgen). Eine kurze exakte Folge

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} L \longrightarrow 0$$

heißt *aufspaltend*, wenn folgende äquivalenten Bedingungen erfüllt sind:
(1) Es gibt $s \in \mathrm{Hom}(L, N)$ mit $g \circ s = 1_L$.
(2) Es gibt $r \in \mathrm{Hom}(N, M)$ mit $r \circ f = 1_M$.
(3) Man hat folgendes kommutative Diagramm exakter Folgen:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & M \arrow[r, "f"] \arrow[d, equal] & N \arrow[r, "g"] \arrow[d, "h"', "\simeq"] & L \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & M \arrow[r, "j"] & M \oplus L \arrow[r, "p"] & L \arrow[r] & 0,
\end{tikzcd}$$

wobei j und p die kanonische Injektion bzw. Projektion ist. (Insbesondere gilt $N \simeq M \oplus L$.)

Übung 1.6.4. Man zeige die Äquivalenz obiger Aussagen (1)–(3). Ferner zeige man, dass ein Homomorphismus h im obigen kommutativen Diagramm automatisch bijektiv ist.

1.7. Erzeugendensysteme, freie Moduln

1.7.1 (Freie Moduln). Sei A eine Algebra. Ein A-Modul M heißt *frei*, falls $M \simeq A^{(I)}$ gilt für eine Indexmenge I. Hierbei bezeichnet $A^{(I)}$ die direkte Summe $\bigoplus_{i \in I} A$.

M heißt *endlich erzeugt frei*, falls hierbei I eine endliche Menge ist, wenn also $M \simeq A^n$ gilt für eine natürliche Zahl n.

1.7.2 (Basen). Für jedes $i \in I$ sei $e_i \in A^{(I)}$ die Folge, die an der i-ten Stelle eine 1, ansonsten nur 0 als Einträge hat. Offenbar hat jedes Element $x \in A^{(I)}$ genau eine Darstellung der Form

$$x = \sum_{i \in I} e_i a_i$$

mit $a_i \in A$, fast alle $= 0$.

Sei M ein freier A-Modul und $A^{(I)} \xrightarrow{f} M$ ein Isomorphismus. Für jedes $i \in I$ sei $b_i = f(e_i)$. Dann gilt offenbar auch, dass jedes Element $x \in M$ genau eine Darstellung der Form

$$x = \sum_{i \in I} b_i a_i$$

mit $a_i \in A$, fast alle $= 0$, hat. Ein solches System $(b_i)_{i \in I}$ nennt man eine *Basis* von M.

Ist M ein beliebiger A-Modul und $(b_i)_{i \in I}$ ein beliebiges System von Elementen in M. Dann gibt es genau eine A-lineare Abbildung $f : A^{(I)} \longrightarrow M$ mit $f(e_i) = b_i$ $(i \in I)$.

1.7.3 (Erzeugendensystem). Sei M ein A-Modul. Dann gibt es eine Menge I und einen Epimorphismus $A^{(I)} \xrightarrow{g} M$ (z. B. kann man $I = M$ wählen). Setzt man $b_i = g(e_i)$, so hat jedes $x \in M$ wegen der Surjektivität von g eine Darstellung als Summe

$$x = \sum_{i \in I} b_i a_i$$

mit $a_i \in A$, fast alle $= 0$. In dem Fall nennt man $(b_i)_{i \in I}$ ein Erzeugendensystem von M. Jedoch, bei fehlender Injektivität, sind die Koeffizienten dabei nicht mehr eindeutig bestimmt.

1.7.4 (Endlich erzeugte Moduln). Sei M ein A-Modul. Es heißt M *endlich erzeugt*, falls es eine natürliche Zahl n und einen Epimorphismus $A^n \xrightarrow{g} M \longrightarrow 0$ gibt. (Oder anders ausgedrückt: M ist ein Faktormodul von A^n.)

Gleichbedeutend ist: Es gibt endlich viele Elemente $b_1, \dots, b_n$ in M, so dass jedes $x \in M$ sich schreiben lässt als $x = \sum_{i=1}^n b_i a_i$ (mit $a_i \in A$).

1.8. Projektive Moduln

Der folgende Begriff verallgemeinert den Begriff des freien Moduls:

1.8.1. Ein A-Modul P heißt *projektiv*, falls er ein direkter Summand eines freien Moduls ist, wenn es also einen A-Modul Q und eine Menge I gibt mit $P \oplus Q \simeq A^{(I)}$.

Übung 1.8.2. Folgende Aussagen für einen A-Modul P sind äquivalent:
(1) P ist projektiv.
(2) Jede kurze exakte Folge $0 \longrightarrow M \longrightarrow N \longrightarrow P \longrightarrow 0$ spaltet auf.
(3) Zu jedem Epimorphismus $g : M \longrightarrow N$ und jedem Homomorphismus $h : P \longrightarrow N$ gibt es einen Homomorphismus $\overline{h} : P \longrightarrow M$, so dass $g \circ \overline{h} = h$ gilt.

Übung 1.8.3. Sei $n > 1$ eine natürliche Zahl. Man zeige, dass der $\mathbb{Z}$-Modul $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ nicht projektiv ist. Ist $n\mathbb{Z}$ projektiver $\mathbb{Z}$-Modul?

1.9. Direkte Summanden und Idempotente

1.9.1 (Projektionen). Sei $M = K \oplus L$. Definiere die Projektion $p_K : M \longrightarrow K$ von M auf K entlang L durch $p_K(k + l) = k$ für jedes $k \in K$ und $l \in L$. Dies ist ein Epimorphismus, und es gilt $(p_K \mid K) = 1_K$ und $\mathrm{Kern}(p_K) = L$. Durch diese Eigenschaften ist der Epimorphismus $p_K : M \longrightarrow K$ eindeutig bestimmt.

1.9.2 (Idempotente Elemente). Sei A eine Algebra. Ein Element $e \in A$ heißt *idempotent*, falls $e^2 = e$ gilt.

Beispiel 1.9.3. Sei K ein direkter Summand von M. Definiere $e_K \in \mathrm{End}(M)$ durch $x \mapsto p_K(x)$. Es ist e_K idempotent.

Bemerkung 1.9.4. Sei M ein A-Modul. Dann ist M in kanonischer Weise ein $\mathrm{End}(M_A)$-Linksmodul durch

$$f \cdot x \overset{def}{=} f(x) \quad \text{für alle} \quad f \in \mathrm{End}(M_A) \text{ und } x \in M.$$

Lemma 1.9.5. *Sei e ein idempotentes Element in $\mathrm{End}(M_A)$. Dann ist $1-e$ idempotent in $\mathrm{End}(M_A)$ mit*

$$\mathrm{Kern}(e) = \{x \in M \mid x = (1-e)(x)\} = \mathrm{Bild}(1-e),$$
$$\mathrm{Bild}(e) = \{x \in M \mid x = e(x)\} = \mathrm{Kern}(1-e)$$

und $M = eM \oplus (1-e)M$.

Beweis. Es gilt $(1-e)^2 = 1 - 2e + e^2 = 1 - e$, und es gilt $e(1-e) = 0 = (1-e)e$. Es folgt

$$\mathrm{Bild}(e) \subseteq \{x \in M \mid x = e(x)\} \subseteq \mathrm{Kern}(1-e),$$
$$\mathrm{Bild}(1-e) = \{x \in M \mid x = (1-e)(x)\} = \mathrm{Kern}(e).$$

Wegen $x = e(x) + (1-e)(x)$ für jedes $x \in M$ sind diese Inklusionen alle Gleichheiten, und $M = eM + (1-e)M$. Sei $x \in eM \cap (1-e)M$, also $x = e(y) = (1-e)(z)$. Dann folgt $x = e(y) = e^2(y) = e(1-e)(z) = 0$, also $eM \cap (1-e)M = 0$. Damit $M = eM \oplus (1-e)M$. $\square$

1.10. Unzerlegbare Moduln

1.10.1 (Unzerlegbarkeit). Ein Modul $M \neq 0$ heißt *unzerlegbar*, falls aus $M \simeq N \oplus N'$ folgt, dass $N = 0$ oder $N' = 0$ ist. Offenbar ist dies der Fall genau dann, wenn 0 und M die einzigen Untermoduln sind, die direkte Summanden von M sind.

Man kann sich denken, dass sich jeder Modul als eine direkte Summe von unzerlegbaren Moduln schreiben lässt. Wir werden später untersuchen, wann dies tatsächlich gilt und eine solche Zerlegung eindeutig ist. ("Satz von Krull-Schmidt")

Die Unzerlegbarkeit lässt sich durch eine Eigenschaft des Endomorphismenrings charakterisieren.

PROPOSITION 1.10.2. *Sei $M \neq 0$ ein Modul. Dann ist M unzerlegbar genau dann, wenn* 0 *und* 1 *die einzigen idempotenten Elemente in* $\mathrm{End}(M_A)$ *sind.*

BEWEIS. Sei M zerlegbar, also $M = K \oplus L$ mit Untermoduln K, $L \neq 0$. Dann ist die Projektion $e_K \in \mathrm{End}(M_A)$ idempotent mit $e_K \neq 0, 1$. Ist umgekehrt $e \in \mathrm{End}(M_A)$ idempotent, so ist $M = eM \oplus (1-e)M$; gilt $e \neq 0, 1$, so folgt eM, $(1-e)M \neq 0$. □

Auch diese Aussage werden wir später (in spezielleren Situationen) präzisieren.

KAPITEL 2

Halbeinfachheit

Im folgenden fixieren wir einen Körper K und studieren endlichdimensionale K-Algebren. Desweiteren beschränken wir unsere Betrachtungen auch auf endlich erzeugte Moduln.

Viele der hier behandelten Sätze gelten in größerer Allgemeinheit. Beweise, die allgemein sehr aufwendig sein können, sind in dieser endlichdimensionalen Situation oftmals viel einfacher zu führen.

In diesem Kapitel beschäftigen wir uns mit Moduln, die noch viele Eigenschaften mit Vektorräumen gemeinsam haben, den halbeinfachen Moduln.

2.1. Endlichdimensionalität

Sei stets A eine endlichdimensionale Algebra über dem Körper K.

Beispiele 2.1.1. (1) Ist A eine endlichdimensionale K-Algebra und n eine natürliche Zahl, so ist auch $\mathrm{M}_n(A)$ eine endlichdimensionale K-Algebra.

(2) Sei G eine endliche Gruppe. Dann ist die Gruppenalgebra KG endlichdimensional. (Eine (endliche) Basis ist gegeben durch die $\xi(g)$ $(g \in G)$; jedes Element der Gruppenalgebra läßt sich eindeutig schreiben als $\sum_{g \in G} g a_g$ $(a_g \in K)$.)

(3) Für $n \geq 1$ ist $K[T]/(T^n)$ eine K-Algebra der Dimension n.

Proposition 2.1.2. *Sei A eine endlichdimensionale K-Algebra, und sei M ein A-Modul. Dann ist M endlich erzeugter A-Modul genau dann, wenn M endlichdimensional über K ist.*

Beweis. Sei M endlichdimensional über K. Dann gibt es $m_1, \ldots, m_t \in M$ mit $M = m_1K + \cdots + m_tK$, und es folgt, dass $M = m_1A + \cdots + m_tA$ endlich erzeugter A-Modul ist. Gilt umgekehrt $M = m_1A + \cdots + m_tA$, und ist $A = a_1K + \cdots + a_sK$, so folgt $M = \sum_{i,j} m_i a_j K$, und damit ist M endlichdimensional. □

Folgerung 2.1.3. *Sei $0 \longrightarrow N \longrightarrow M \longrightarrow L \longrightarrow 0$ eine kurze exakte Folge von A-Moduln (A eine endlichdimensionale K-Algebra). Dann ist M endlich erzeugt genau dann, wenn N und L endlich erzeugt sind. In dem Fall gilt $\dim(M_K) = \dim(L_K) + \dim(N_K)$.*

Beweis. Obige exakte Folge ist insbesondere eine kurze exakte Folge von K-Moduln, die aufspaltet (da jeder K-Modul frei ist). (Achtung: D. h. nicht, dass sie als Folge von A-Moduln aufspalten muss!) Also $M_K \simeq L_K \oplus N_K$. Daraus folgt die Behauptung mit 2.1.2. □

Folgerung 2.1.4. *Sei M ein endlich erzeugter A-Modul. Jede nicht-leere Menge $\mathcal{X}$ von Untermoduln von M hat ein maximales Element und auch ein minimales Element (bzgl. der durch Inklusion gegebenen Ordnung).*

Sei $(X, \leq)$ eine geordnete Menge. Ein $x \in X$ heißt maximal (minimal), falls für jedes $y \in X$ mit $x \leq y$ (bzw. mit $y \leq x$) gilt, dass $x = y$ ist. Eine Menge kann mehrere maximale Elemente haben. Dagegen ist ein $x \in X$ ein größtes (kleinstes) Element, falls für alle $y \in X$ schon $y \leq x$ (bzw. $x \leq y$) gilt. Größte Elemente sind, falls existent, eindeutig.

Beweis. Jedes $U \in \mathcal{X}$ hat endliche Dimension, $0 \leq \dim U \leq \dim M$. Ein $U \in \mathcal{X}$ mit maximaler (minimaler) Dimension ist maximal (bzw. minimal) in $\mathcal{X}$. □

2.1.5. Sei M ein A-Modul. Ein Untermodul $U \subset M$ heißt maximal, falls er maximal ist in der Menge der Untermoduln $V \subset M$ mit $V \neq M$. (Eine ähnliche Definition gilt für (Links-/Rechts-) Ideale.) Offenbar ist ein Untermodul $U \subseteq M$ maximal genau dann, wenn der Faktormodul M/U einfach ist. Aus der vorstehenden Aussage folgt, dass jeder endlich erzeugte A-Modul $M \neq 0$ einen maximalen Untermodul besitzt. Ebenso folgt, dass jeder endlich erzeugte A-Modul $M \neq 0$ einen einfachen Untermodul besitzt.

Übung 2.1.6. Wie sehen (bis auf Isomorphie) die einfachen $\mathbb{Z}$-Moduln und deren Endomorphismenringe aus?

2.2. Divisionsalgebren

2.2.1. Eine K-Algebra, die ein Schiefkörper ist, heißt auch *Divisionsalgebra*.

Beispiel 2.2.2. Die Quaternionenalgebra $\mathbb{H}$ ist eine (nicht-kommutative) Divisionsalgebra über $\mathbb{R}$. Man mache sich klar, dass $\mathbb{H}$ keine $\mathbb{C}$-Algebra ist.

Satz 2.2.3. *Sei D eine Divisionsalgebra. Dann gilt:*

(1) *Jeder D-Modul hat eine Basis, d. h. ist frei.*
(2) *Jeder Untermodul eines D-Moduls ist direkter Summand.*

Beweis. Wie in der Linearen Algebra. Die Kommutativität des Körpers ist dabei nicht wichtig. □

Die Umkehrung von (1), d. h. dass durch (1) schon die Divisionsalgebren ausgezeichnet sind, wird in Übung 2.7.7 gezeigt.

In nachfolgenden Abschnitten werden wir die "nächst komplizierte" Klasse von Algebren studieren, die sogenannten halbeinfachen Algebren.

Proposition 2.2.4. *Sei K algebraisch abgeschlossen, und sei D eine endlichdimensionale K-Divisionsalgebra. Dann gilt $D = K$. (Genauer: $D \simeq K$.)*

Beweis. Es ist $1_D \cdot K$ eine zu K isomorphe Unteralgebra von D, die wir mit K identifizieren. Sei $x \in D$. Da $ax = xa$ für jedes $a \in K$ gilt (vgl. Axiome einer Algebra), ist

$$K[x] \overset{def}{=} \{a_0 + xa_1 + \cdots + x^n a_n \mid n \geq 0,\, a_i \in K\}$$

eine kommutative Ringerweiterung von K, und wegen der Endlichdimensionalität genügt x einer Polynomgleichung $P(x) = 0$ mit einem normierten $P \in K[T]$. Da K algebraisch abgeschlossen ist, zerfällt P in Linearfaktoren

$$P = \prod_{i=1}^{d} (T - a_i)$$

mit $a_1, \ldots, a_d \in K$. Wegen $P(x) = 0$ folgt $x = a_i$ für ein i, also $x \in K$. □

Bemerkung 2.2.5. Es ist ein tiefliegendes Resultat, dass die einzigen (endlichdimensionalen) Divisionsalgebren über $\mathbb{R}$ die Schiefkörper $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ und $\mathbb{H}$ sind. (Satz von Frobenius.)

2.3. Halbeinfache Moduln

Alle Moduln seien endlich erzeugt.

2.3.1. Ein Modul M heißt *halbeinfach*, falls er sich als direkte Summe von einfachen Untermoduln schreiben lässt.

Aus der Endlichdimensionalität folgt sofort, dass eine solche direkte Summenzerlegung endlich ist.

Satz 2.3.2. *Folgende Aussagen über den Modul M sind äquivalent:*

(1) *M ist halbeinfach.*
(2) *M ist Summe einfacher Untermoduln.*
(3) *Jeder Untermodul von M ist ein direkter Summand.*

Beweis. (1)⇒(2): Dies ist trivial.

(2)⇒(3): Sei M Summe einfacher Untermoduln. Sei N ein Untermodul von M. Sei $\mathcal{X}$ die Menge aller Untermoduln V von M mit $V \cap N = 0$. Offenbar ist $\mathcal{X} \neq \emptyset$, denn z. B. ist $0 \in \mathcal{X}$. Sei nun L ein maximales Element von $\mathcal{X}$. Dann ist die Summe $N + L = N \oplus L$ direkt. Zu zeigen ist, dass $N + L = M$ ist.

Angenommen, es gilt $N + L \neq M$. Dann kann, da M Summe einfacher Untermoduln ist, nicht jeder einfache Untermodul in $N + L$ liegen. Sei etwa S einfacher Untermodul mit $S \nsubseteq N + L$. Dann ist $S \cap (N + L)$ ein echter Untermodul von S, wegen der Einfachheit also $S \cap (N + L) = 0$. Es ist insbesondere $S \cap N = 0$, d. h. $S \in \mathcal{X}$, und dann ist auch $L + S \in \mathcal{X}$. Wegen der Maximalität von L ist $L + S = L$, und daher $S \subseteq L$. Da aber auch $S \cap L = 0$, ergibt dies einen Widerspruch.

(3)⇒(1): Induktion nach der Dimension von M über K. Ist $M = 0$, so ist die Aussage trivial, $\dim M = 1$, so ist M selbst einfach. Gelte nun $n = \dim M \geq 1$. Es gibt einen einfachen Untermodul S von M, und nach Voraussetzung gibt es einen Untermodul N von M mit $M = S \oplus N$.

Nun ist $\dim N < n$. Außerdem erfüllt N Bedingung (3), d. h. jeder Untermodul L von N ist ein direkter Summand von N: Es gibt nämlich (da M Bedingung (3) erfüllt) einen Untermodul L' von M mit $M = L \oplus L'$. Sei $L'' = L' \cap N$. Es ist $L \cap L'' \subseteq L \cap L' = 0$ und $L + L'' = (L + L') \cap N = M \cap N = N$, also $N = L \oplus L''$.

Nach Induktionsvoraussetzung ist N halbeinfach, und dann ist es auch $M = S \oplus N$. □

Der Beweis von (2)⇒(3) kann noch verfeinert werden, so dass folgende stärkere Aussage gilt:

Satz 2.3.3. *Sei $M = \sum_{i \in I} S_i$ mit einfachen Untermoduln S_i. Sei N ein Untermodul von M. Dann gibt es eine Teilmenge J von I, so dass*

$$M = N \oplus (\bigoplus_{j \in J} S_j)$$

gilt.

Beweis. Wähle eine Teilmenge $J \subseteq I$ maximal mit der Eigenschaft, dass $N \cap \left(\sum_{j \in J} S_j\right) = 0$ gilt, sowie die Summe $\sum_{j \in J} S_j$ direkt ist. (Z. B. erfüllt die leere Menge die beiden Eigenschaften, daher gibt es eine solche maximale Teilmenge.) Es ist dann die Summe $N + \sum_{j \in J} S_j$ eine direkte Summe, und man zeigt wie im obigen Beweis, dass diese Summe ganz M ergibt (wobei man anstatt obigem S eines der S_i ($i \in I$) nimmt). □

Im Spezialfall $N = 0$ liefert der Satz auch einen direkten Beweis für (1)⇒(2), und zudem die folgende, bessere Aussage.

Satz 2.3.4. *Sei $M = \bigoplus_{i \in I} S_i$ halbeinfach (mit einfachen S_i). Sei*

$$0 \longrightarrow N \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} L \longrightarrow 0$$

eine kurze exakte Folge. Dann sind N und L halbeinfach, die Folge spaltet auf, und es gibt eine Teilmenge $J \subseteq I$ mit

$$N \simeq \bigoplus_{i \in I \setminus J} S_i \quad \text{und} \quad L \simeq \bigoplus_{j \in J} S_j.$$

Beweis. Da $\operatorname{Bild}(f)$ ein Untermodul von M ist, gibt es nach dem vorherigen Satz eine Teilmenge $J \subseteq I$ mit

$$M = \operatorname{Bild}(f) \oplus \bigoplus_{j\in J} S_j.$$

Daher spaltet die Folge auf, und es ist $L \simeq M/\operatorname{Bild}(f) \simeq \bigoplus_{j\in J} S_j$. Andererseits gilt

$$M = \bigoplus_{i\in I\setminus J} S_i \oplus \bigoplus_{j\in J} S_j.$$

"Kürzen" liefert $N \simeq \operatorname{Bild}(f) \simeq \bigoplus_{i\in I\setminus J} S_i$ (vgl. nachstehende Übung). □

Übung 2.3.5. Sei $M = N \oplus N' = N \oplus N''$. Man zeige $N' \simeq N''$. Muss $N' = N''$ gelten?

Folgerung 2.3.6. *Ein Modul M ist halbeinfach genau dann, wenn jede kurze exakte Folge $0 \longrightarrow N \longrightarrow M \longrightarrow L \longrightarrow 0$ aufspaltet.*

Beweis. "$\Rightarrow$" folgt aus dem vorherigen Satz. "$\Leftarrow$": Sei N ein Untermodul von M. Dann spaltet nach Voraussetzung insbesondere die Folge $0 \longrightarrow N \xrightarrow{\subset} M \longrightarrow M/N \longrightarrow 0$, und es folgt, dass N ein direkter Summand von M ist. Nach Satz 2.3.2 ist M halbeinfach. □

Bemerkung 2.3.7. Seien M und N Moduln. Dann ist $\operatorname{Hom}(M,N)$ ein Rechtsmodul über der Algebra $\operatorname{End}(M)$ und ein Linksmodul über der Algebra $\operatorname{End}(N)$, wobei die jeweilige Operation durch Hintereinanderschaltung von Abbildungen gegeben ist, also liefert z. B.

$$\operatorname{Hom}(M,N) \times \operatorname{End}(M) \longrightarrow \operatorname{Hom}(M,N),\ (f,g) \mapsto f \circ g$$

die $\operatorname{End}(M)$-Rechtsmodulstruktur.

Satz 2.3.8 (Eindeutigkeit). *Die Summanden einer Zerlegung $M = S_1 \oplus S_2 \oplus \cdots \oplus S_t$ eines halbeinfachen Moduls in einfache Moduln sind bis auf Isomorphie und Reihenfolge eindeutig bestimmt.*

Beweis. Sei S ein einfacher Modul. Es ist $\operatorname{Hom}_A(S,M) \simeq \bigoplus_{i=1}^t \operatorname{Hom}_A(S,S_i)$ ein Rechtsvektorraum über dem Divisionsalgebra $D = \operatorname{End}_A(S)$. Nach dem Schurschen Lemma ist

$$\operatorname{Hom}_A(S,S_i) \simeq \begin{cases} D & S \simeq S_i, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Folglich ist die Anzahl der zu S isomorphen Summanden in obiger Zerlegung durch die Dimension des D-Vektorraums $\operatorname{Hom}_A(S,M)$ gegeben und somit durch M eindeutig bestimmt. □

Übung 2.3.9. Sei A als A-Modul $A_A = S_1 \oplus \cdots \oplus S_t$ halbeinfach (S_i einfach). Man zeige:

(1) Sei S ein einfacher A-Modul. Dann gibt es ein i mit $S \simeq S_i$.
(2) Jeder (endlich erzeugte) A-Modul ist halbeinfach.
(3) Jeder (endlich erzeugte) A-Modul ist projektiv.

2.4. Sockel und Radikal eines Moduls

2.4.1. Sei M ein Modul. Sei $\operatorname{Soc}(M)$ (der *Sockel*) die Summe aller einfachen Untermoduln von M, und sei $\operatorname{Rad}(M)$ (das *Radikal*) der Durchschnitt aller maximalen Untermoduln von M. Dies sind Untermoduln von M.

Aufgrund der vorausgesetzten Endlichdimensionalität gibt es endlich viele einfache Untermoduln S_i mit $\operatorname{Soc}(M) = \sum_{i=1}^t S_i$, und ebenso endlich viele maximale Untermoduln N_i mit $\operatorname{Rad}(M) = \bigcap_{i=1}^s N_i$.

Offenbar ist M halbeinfach genau dann, wenn $M = \operatorname{Soc}(M)$ gilt.

Satz 2.4.2 (Funktorialität). *Sei $f : M \longrightarrow N$ eine lineare Abbildung zwischen A-Moduln M und N. Dann gilt*

$$f(\mathrm{Soc}(M)) \subseteq \mathrm{Soc}(N) \quad \textit{und} \quad f(\mathrm{Rad}(M)) \subseteq \mathrm{Rad}(N).$$

Beweis. (1) Sei S ein einfacher Untermodul von M. Dann ist entweder $f(S) = 0$ oder $f(S)$ ein einfacher Untermodul von N. Es folgt daher sofort $f(\mathrm{Soc}(M)) \subseteq \mathrm{Soc}(N)$.

(2) Sei N' ein maximaler Untermodul von N. Dann ist $\pi : N \longrightarrow N/N' = S$ die kanonische Surjektion auf den einfachen Modul $S = N/N'$. Der Kern der Verknüpfung $\pi \circ f : M \longrightarrow S$ ist entweder $= M$ (falls $\pi \circ f = 0$ gilt) oder maximaler Untermodul von M (im Fall $\pi \circ f \neq 0$, also $\pi \circ f$ surjektiv). In jedem Fall umfasst dieser Kern $\mathrm{Rad}(M)$, und damit folgt $f(\mathrm{Rad}(M)) \subseteq N'$. Da dies für jeden maximalen Untermodul N' von N gilt, folgt $f(\mathrm{Rad}(M)) \subseteq \mathrm{Rad}(N)$. □

Folgerung 2.4.3. $\mathrm{Soc}(A) = \mathrm{Soc}(A_A)$ *und* $\mathrm{Rad}(A) = \mathrm{Rad}(A_A)$ *sind Ideale in A.*

Beweis. Nach Definition sind $\mathrm{Soc}(A_A)$ und $\mathrm{Rad}(A_A)$ Rechtsideale in A. Für jedes $a \in A$ ist die Linksmultiplikation $\lambda_a : A \longrightarrow A$, $x \mapsto ax$ ein Homomorphismus von A_A nach A_A, überführt daher Sockel in den Sockel und Radikal in das Radikal, was gerade besagt, dass Sockel und Radikal auch Linksideale sind. □

Folgerung 2.4.4. *Es gilt*

$$\mathrm{Soc}(M_1 \oplus M_2) = \mathrm{Soc}(M_1) \oplus \mathrm{Soc}(M_2)$$

und

$$\mathrm{Rad}(M_1 \oplus M_2) = \mathrm{Rad}(M_1) \oplus \mathrm{Rad}(M_2).$$

Beweis. Die Einbettung $j_i : M_i \longrightarrow M_1 \oplus M_2$ $(i = 1, 2)$ überführt $\mathrm{Soc}(M_i)$ in $\mathrm{Soc}(M_1 \oplus M_2)$, und daher $\mathrm{Soc}(M_1) \oplus \mathrm{Soc}(M_2) \subseteq \mathrm{Soc}(M_1 \oplus M_2)$. Die Projektion $p_i : M_1 \oplus M_2 \longrightarrow M_i$ $(i = 1, 2)$ überführt $\mathrm{Soc}(M_1 \oplus M_2)$ in $\mathrm{Soc}(M_i)$, und es ergibt sich $\mathrm{Soc}(M_1 \oplus M_2) \subseteq \mathrm{Soc}(M_1) \oplus \mathrm{Soc}(M_2)$. Dieselbe Argumentation gilt für das Radikal. □

Lemma 2.4.5. $\mathrm{Rad}(M/\mathrm{Rad}(M)) = 0$.

Beweis. Die maximalen Untermoduln von M enthalten alle $\mathrm{Rad}(M)$, korrespondieren also zu den maximalen Untermoduln von $M/\mathrm{Rad}(M)$, vgl. Übung 1.2.7. Übergang zum Durchschnitt liefert nun die Behauptung. □

Satz 2.4.6. *Sei M ein Modul.*

(1) *M ist halbeinfach genau dann, wenn* $\mathrm{Rad}(M) = 0$ *gilt.*
(2) *$M/\mathrm{Rad}(M)$ ist halbeinfach.*

Beweis. (1) Sei $M = S_1 \oplus \ldots \oplus S_t$ halbeinfach. Da jeder einfache Modul S_i triviales Radikal hat, gilt dies nach der Folgerung auch für M.

Gelte nun $\mathrm{Rad}(M) = 0$. Wir zeigen per Induktion nach $\dim(M)$, dass M direkte Summe einfacher Untermoduln ist. Für $M = 0$ ist dies klar. Falls $M \neq 0$, so gibt es einen einfachen Untermodul S. Wegen $\mathrm{Rad}(M) = 0$ gibt es einen maximalen Untermodul N von M mit $N \cap S = 0$ (andernfalls würde für jeden maximalen Untermodul N gelten, dass $N \cap S = S$, also $S \subseteq N$ gilt). Aus der Maximalität von N folgt $N + S = M$, und damit $M = N \oplus S$. Aus der Folgerung ergibt sich ferner $\mathrm{Rad}(N) = 0$, und damit kann die Induktionsvoraussetzung auf N angewendet werden.

(2) Folgt aus (1) und dem vorherigen Lemma. □

Zusammenfassend haben wir also gezeigt:

$$\mathrm{Soc}(M) = M \quad \Leftrightarrow \quad M \text{ halbeinfach} \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{Rad}(M) = 0.$$

Übung 2.4.7. Sei M der $\mathbb{Z}$-Modul $\mathbb{Z}$. Man zeige, dass $\mathbb{Z}$ nicht halbeinfach ist sowie $\mathrm{Rad}(M) = 0 = \mathrm{Soc}(M)$.

2.5. Matrizen von Homomorphismen

LEMMA 2.5.1. *Sei $M = M_1 \oplus \ldots \oplus M_n$ direkte Summe von A-Moduln. Dann hat man eine Isomorphie von Algebren*

$$\mathrm{End}(M_A) \simeq \begin{pmatrix} \mathrm{Hom}(M_1, M_1) & \mathrm{Hom}(M_1, M_2) & \ldots & \mathrm{Hom}(M_1, M_n) \\ \mathrm{Hom}(M_2, M_1) & \mathrm{Hom}(M_2, M_2) & \ldots & \mathrm{Hom}(M_2, M_n) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mathrm{Hom}(M_m, M_1) & \mathrm{Hom}(M_m, M_2) & \ldots & \mathrm{Hom}(M_m, M_n) \end{pmatrix},$$

wobei die Algebra auf der rechten Seite besteht aus allen $n \times n$-Matrizen (f_{ij}) mit $f_{ij} \in$ $\mathrm{Hom}(M_i, M_j)$ mit üblicher Matrizenaddition und -multiplikation und üblicher Multiplikation mit Skalaren aus K.

BEWEIS. Mit den kanonischen Injektionen $j_i : M_i \longrightarrow M$ und den kanonischen Projektionen $p_i : M \longrightarrow M_i$ gilt offenbar

$$\sum_{i=1}^{n} j_i \circ p_i = 1_M \quad \text{und} \quad p_i \circ j_k = \begin{cases} 1_{M_i} & i = k \\ 0 & i \neq k. \end{cases}$$

Man prüft leicht nach, dass folgende Abbildungen zueinander inverse Algebrenhomomorphismen sind:

$$\mathrm{End}(M) \longrightarrow \big(\mathrm{Hom}(M_i, M_k)\big), \quad f \mapsto (p_k \circ f \circ j_i),$$
$$\big(\mathrm{Hom}(M_i, M_k)\big) \longrightarrow \mathrm{End}(M), \quad (f_{ik}) \mapsto \sum_{i,\,k} j_k \circ f_{ik} \circ p_i.$$

□

Wir notieren zwei Spezialfälle.

FOLGERUNG 2.5.2. *Ist $M = N^n$, so gilt* $\mathrm{End}(M) \simeq \mathrm{M}_n(\mathrm{End}(N))$.

FOLGERUNG 2.5.3. *Sei $M = M_1 \oplus \ldots \oplus M_n$ mit* $\mathrm{Hom}(M_i, M_j) = 0$*, falls $i \neq j$, so gilt*

$$\mathrm{End}(M) \simeq \mathrm{End}(M_1) \times \mathrm{End}(M_2) \times \ldots \times \mathrm{End}(M_n).$$

2.6. Einfache Algebren

DEFINITION 2.6.1. Eine Algebra A heißt *einfach*, falls $A \neq 0$, und falls 0 und A die einzigen (zweiseitigen) Ideale in A sind.

PROPOSITION 2.6.2. *Sei D eine Divisionsalgebra. Dann ist $A = \mathrm{M}_n(D)$ einfach.*

BEWEIS. Sei I ein Ideal in A mit $I \neq 0$. Zu zeigen ist $I = A$. Sei $\alpha = (\alpha_{ij}) \in A$. Es gibt $\beta = (\beta_{ij}) \in I$ mit $\beta \neq 0$, etwa $\beta_{rs} \neq 0$. Bezeichne mit $e_{kl} \in A$ die Matrix, die nur an der Stelle (k, l) eine 1, sonst nur Nullen hat. Es gilt

$$\alpha = \sum_{i,\,j} e_{ij}\alpha_{ij} = \sum_{i,\,j} (e_{ir}\beta e_{sj})\beta_{rs}^{-1}\alpha_{ij} \in I,$$

da I ein zweiseitige Ideal ist. □

DEFINITION 2.6.3. Eine Algebra A heißt *halbeinfach*, falls der Modul A_A halbeinfach ist.

PROPOSITION 2.6.4. *Sei A eine einfache Algebra. Dann ist A halbeinfach.*

BEWEIS. Wegen $A \neq 0$ ist $\mathrm{Rad}(A) \neq A$. Da $\mathrm{Rad}(A)$ ein Ideal in A ist, folgt aus der Einfachheit $\mathrm{Rad}(A) = 0$. Also ist A halbeinfach. □

FOLGERUNG 2.6.5. *Seien $D_1, \ldots, D_t$ Divisionsalgebren und $n_1, \ldots, n_t \geq 1$ natürliche Zahlen. Dann ist*

$$\mathrm{M}_{n_1}(D_1) \times \mathrm{M}_{n_2}(D_2) \times \ldots \times \mathrm{M}_{n_t}(D_t)$$

halbeinfach.

SATZ 2.6.6 (Struktursatz für einfache Algebren). *Folgende Aussagen sind äquivalent:*

(1) *A ist einfach.*
(2) *$A \neq 0$ ist halbeinfach und es gibt bis auf Isomorphie nur einen einfachen A-Modul.*
(3) *Es ist $A \simeq \mathrm{M}_n(D)$ für eine Divisionsalgebra D und eine natürliche Zahl $n \geq 1$.*

Ferner sind n und D (bis auf Isomorphie) in (3) eindeutig durch A bestimmt.

BEWEIS. (1)⇒(2) Sei A einfach. Nach Proposition 2.6.4 ist A halbeinfach, $A = S_1 \oplus \ldots \oplus S_t$. Nach Übung 2.3.9 ist jeder einfache Modul isomorph zu einem S_i. Zu zeigen ist also, dass $S_i \simeq S_j$ gilt für alle i, j. Jedes S_i ist ein minimales Rechtsideal in A; AS_i ist ein nichttriviales Ideal, und daher $AS_i = A$. Dann gilt aber auch $A(S_iS_j) = A$, insbesondere $S_iS_j \neq 0$. Sei $x \in S_i$ mit $xS_j \neq 0$. Da S_i einfach ist, folgt $xS_j = S_i$. Weiter ist $S_j \longrightarrow xS_j$, $y \mapsto xy$ ein Epimorphismus, und da S_j einfach ist, sogar ein Isomorphismus. Insgesamt ergibt sich $S_j \simeq xS_j = S_i$.

(2)⇒(3) Sei A halbeinfach und S der bis auf Isomorphie einzige A-Modul. Es gilt dann $A \simeq S^n$ für ein $n \geq 1$. Es folgt $A \simeq \mathrm{End}(A_A) \simeq \mathrm{M}_n(\mathrm{End}(S_A))$, und $D = \mathrm{End}(S_A)$ ist ein Schiefkörper nach dem Lemma von Schur.

(3)⇒(1) ist Proposition 2.6.2.

Zur Eindeutigkeitsaussage: Die bisher geführte Argumentation zeigt, dass die Zahl n in (3) die Anzahl der einfachen Summanden in einer direkten Zerlegung von A ist (diese Zahl und diese Summanden sind nach Satz 2.3.8 eindeutig), und sich der Schiefkörper D in (3) als Endomorphismenring des einzigen einfachen Moduls ergibt. Schließlich gilt nach Übung 2.6.7 für die Algebra $B = \mathrm{M}_{n'}(D')$ (D' eine Divisionsalgebra), dass n' die eindeutige Anzahl der einfachen Summanden in einer direkten Zerlegung von B ist und D' deren Endomorphismenring. Zusammen ergibt dies die Eindeutigkeit von n und D. □

ÜBUNG 2.6.7. Sei $A = \mathrm{M}_n(D)$, wobei D eine Divisionsalgebra ist. Für $i = 1, \ldots, n$ sei $S_i = e_{ii}A$. Man zeige direkt (ohne Satz 2.6.6 zu benutzen):

(a) $A = S_1 \oplus \ldots \oplus S_n$.
(b) Die S_i sind einfache Untermoduln.
(c) $S_i \simeq S_j$ für alle i, j.
(d) $\mathrm{End}(S_i) \simeq D$ für alle i.

FOLGERUNG 2.6.8. *Sei K algebraisch abgeschlossen und A eine einfache K-Algebra. Dann gilt $A \simeq \mathrm{M}_n(K)$, wobei $n^2 = \dim(A_K)$ ist.*

2.7. Halbeinfache Algebren

SATZ 2.7.1 (Charakterisierungen halbeinfacher Algebren). *Folgende Aussagen sind äquivalent (A endlichdimensionale Algebra, alle Moduln endlich erzeugt):*

(1) *A ist halbeinfache Algebra.*
(2) $\mathrm{Rad}(A) = 0$.
(3) *Jeder A-Modul ist halbeinfach.*
(4) *Jeder A-Modul ist projektiv.*
(5) *Alle kurzen exakten Folgen von A-Moduln spalten auf.*
(6) *Jeder Untermodul eines beliebigen A-Moduls ist direkter Summand.*

BEWEIS. (1)⇔(2) Folgt aus Satz 2.4.6.
(1)⇔(3) folgt aus Übung 2.3.9.
(4)⇔(5) folgt aus der Charakterisierung projektiver Moduln (Übung 1.8.2).

(3)⇔(5) ergibt sich aus Folgerung 2.3.6.

(3)⇔(6) folgt aus der Charakterisierung halbeinfacher Moduln (Satz 2.3.2). □

SATZ 2.7.2 (Struktursatz von Wedderburn). *Sei A eine halbeinfache K-Algebra. Dann gibt es Divisionsalgebren $D_1, \ldots, D_t$ über K und natürliche Zahlen $n_1, \ldots, n_t$, so dass*

$$A \simeq \mathrm{M}_{n_1}(D_1) \times \mathrm{M}_{n_2}(D_2) \times \ldots \times \mathrm{M}_{n_t}(D_t).$$

Hierbei sind die Daten $(n_1, D_1), \ldots, (n_t, D_t)$ bis auf Reihenfolge (und Isomorphie der D_i) eindeutig bestimmt.

BEWEIS. Zerlege A in eine direkte Summe $A = M_1 \oplus \ldots \oplus M_t$, wobei jedes M_i eine direkte Summe von n_i Kopien eines einfachen Moduls S_i ist, $M_i \simeq S_i^{n_i}$, so dass $S_i \not\simeq S_j$ für $i \neq j$ gilt. Dann folgt $\mathrm{Hom}(M_i, M_j) = 0$ für $i \neq j$. Sei D_i der Endomorphismenring von S_i, der wegen der Einfachheit eine Divisionsalgebra ist. Dann folgt

$$A \overset{1.1.12}{\simeq} \mathrm{End}(A) \overset{2.5.3}{\simeq} \prod_{i=1}^{t} \mathrm{End}(M_i) \simeq \prod_{i=1}^{t} \mathrm{End}(S_i^{n_i}) \overset{2.5.2}{\simeq} \prod_{i=1}^{t} \mathrm{M}_{n_i}(D_i).$$

Zur Eindeutigkeit: Es gelte

$$A \simeq \prod_{i=1}^{s} \mathrm{M}_{n'_i}(D'_i)$$

mit Divisionsalgebren D'_i. Jedes $\mathrm{M}_{n'_i}(D'_i)$ zerlegt sich in eine direkte Summe von n'_i Kopien von einfachen $\mathrm{M}_{n'_i}(D'_i)$-Moduln S'_i (wie in Übung 2.6.7); dies sind offenbar auch einfache A-Moduln (nur die i-te Komponente von A ist relevant). Für $i \neq j$ gilt $S'_i \not\simeq S'_j$. (Gäbe es nämlich einen Isomorphismus $f : S'_i \longrightarrow S'_j$ von A-Moduln, so folgte $f(S'_i S'_j) = f(S'_i)S'_j = S'_j S'_j \neq 0$, da S'_j ein idempotentes Elemente enthält; also folgte $S'_i S'_j \neq 0$; andererseits liegen S'_i und S'_j in unterschiedlichen Komponenten von A, was einen Widerspruch ergibt.) Aus der Eindeutigkeitsaussage 2.3.8 folgt nun $s = t$ und (bis auf Umnummerierung der Indizes) $n'_i = n_i$, sowie $D'_i \simeq D_i$ für alle i. □

FOLGERUNG 2.7.3. *Sei K ein algebraisch abgeschlossener Körper und A eine halbeinfache K-Algebra. Dann gibt es (bis auf Reihenfolge) eindeutige natürliche Zahlen $n_1, \ldots, n_t$, so dass*

$$A \simeq \mathrm{M}_{n_1}(K) \times \mathrm{M}_{n_2}(K) \times \ldots \times \mathrm{M}_{n_t}(K).$$

BEWEIS. Dies folgt sofort aus dem Struktursatz von Wedderburn und Proposition 2.2.4. □

BEMERKUNG 2.7.4. Wedderburn hat obigen Satz über beliebigen Grundkörpern um 1907 bewiesen. Zuvor wurde für den Spezialfall $k = \mathbb{C}$ (vgl. Folgerung) dieser Satz 1893 von Molien bewiesen. In 1927 hat Emil Artin den Struktursatz über halbeinfache Algebren unter allgemeineren Bedingungen als die Endlichdimensionalität bewiesen. Diesen allgemeineren Satz findet man dann oft unter der Bezeichnung Satz von Artin-Wedderburn oder Wedderburn-Artin.

FOLGERUNG 2.7.5. *Eine Algebra A ist halbeinfach, genau dann, wenn der Linksmodul ${}_AA$ halbeinfach ist.*

BEWEIS. Ist A halbeinfach, dann gilt $A \simeq \prod_{i=1}^{t} \mathrm{M}_{n_i}(D_i)$. Es ist $\mathrm{Rad}({}_AA)$ ein Ideal in A (folgt genau wie in 2.4.3 für $\mathrm{Rad}(A_A)$), und da jedes $\mathrm{M}_{n_i}(D_i)$ einfach ist, folgt $\mathrm{Rad}({}_AA) = 0$. Dann folgt genauso wie für Rechtsmoduln in 2.4.6 auch für den Linksmodul ${}_AA$ die Halbeinfachheit. Die Umkehrung gilt analog. □

BEISPIEL 2.7.6 (Satz von Maschke). Sei G eine endliche Gruppe der Ordnung n, sei K ein Körper. Die Gruppenalgebra KG ist halbeinfach genau dann, wenn n nicht durch die Charakteristik $\mathrm{Char}(K)$ von K geteilt wird. Insbesondere gilt dies für $\mathrm{Char}(K) = 0$.

ÜBUNG 2.7.7. Sei A eine endlichdimensionale Algebra, so dass jeder endlich erzeugte A-Modul frei ist. Man zeige, dass dann A eine Divisionsalgebra ist.

ÜBUNG 2.7.8. Wir betrachten hier beliebige Ringe und verallgemeinern die vorstehende Aufgabe. Erinnerung: Ein Ring $R \neq 0$ ist ein Schiefkörper, falls jedes Element $x \neq 0$ ein Links- *und* ein Rechtsinverses besitzt. (Diese sind dann notwendig gleich.)

(a) Man zeige, dass ein Ring $R \neq 0$ ein Schiefkörper ist genau dann, wenn 0 und R die einzigen Rechtsideale sind.

(b) Sei $R \neq 0$ ein Ring, über dem jeder endlich erzeugte R-Modul frei ist. Man zeige, dass R ein Schiefkörper ist.

HINWEIS: Es soll und darf folgende Tatsache benutzt werden: Jeder Ring $R \neq 0$ enthält ein maximales Rechtsideal I. (Dies folgt aus dem Zornschen Lemma, s.u.) Betrachte R/I.

Zum ZORNSCHEN LEMMA: Es ist äquivalent zum Auswahlaxiom und besagt, dass falls jede nichtleere (partiell) geordnete Menge $(X, \leq)$, die induktiv ist, ein maximales Element enthält. Dabei heißt induktiv, dass jede total geordnete Teilmenge L von X eine obere Schranke $s \in X$ hat (d. h. für alle $x \in L$ gilt $x \leq s$).

SATZ. *Sei R ein Ring und I ein Rechtsideal in R mit $I \neq R$. Dann gibt es ein maximales Rechtsideal M mit $I \subseteq M$.*

BEWEIS. Die Menge $\mathcal{X}$ aller Rechtsideale J mit $I \subseteq J$ und $J \neq R$ ist nichtleer ($I \in \mathcal{X}$) und induktiv: Sei $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{X}$ total geordnet. Dann ist $S = \bigcup_{J \in \mathcal{L}} J$ ein Ideal (denn sind $x_i \in S$, etwa $x_i \in J_i$ ($J_i \in \mathcal{L}$), so ist etwa $J_1 \subseteq J_2$, also $x_1 + x_2 \in J_2$, also $x_1 + x_2 \in S$) und $S \neq R$, denn sonst wäre $1 \in S$, und dann $1 \in J$ für ein $J \in \mathcal{L}$. Offenbar ist S eine obere Schranke für $\mathcal{L}$. Nun kann das Zornsche Lemma angewandt werden, d. h. es gibt ein maximales Element $M \in \mathcal{X}$, und es folgt die Behauptung. □

2.8. Morita-Äquivalenz

Der Satz von Wedderburn führt die Modultheorie halbeinfacher Algebren auf die Modultheorie von Matrizenringen $\mathrm{M}_n(D)$ über Divisionsalgebren D zurück. In der Tat ist die Modultheorie über $\mathrm{M}_n(D)$ der von D selbst sehr ähnlich, sogar nahezu identisch. Was dies genau bedeutet, präzisieren wir nun. Dies führt zur Sprache der Kategorien und Funktoren.

2.8.1 (Die Kategorie $\mathrm{mod}-A$). Die Gesamtheit aller (endlich erzeugten) A-Moduln bildet eine sogenannte Kategorie, die wir mit $\mathrm{mod}-A$ bezeichnen. (Wir verwenden $A-$ mod für Linksmoduln.) Eine Kategorie besteht immer aus

(i) einer Klasse von Objekten (hier: die A-Moduln), und
(ii) für je zwei Objekte X und Y einer Menge von Morphismen $X \xrightarrow{f} Y$, hier die Menge $\mathrm{Hom}_A(X, Y)$ von Homomorphismen. Morphismen $X \xrightarrow{f} Y$ und $Y \xrightarrow{g} Z$ kann man verknüpfen: $X \xrightarrow{gf} Z$, und diese Operation ist assoziativ. Ferner gibt es immer identische Morphismen $X \xrightarrow{1_X} X$ mit $f1_X = f$ und $1_X g = g$ für alle Morphismen f und g, die man wie beschrieben mit 1_X komponieren kann.

Ist A eine K-Algebra, so ist $\mathrm{mod}-A$ eine sogenannte K-Kategorie, d. h. die Morphismenräume sind K-Vektorräume, so dass sich Verknüpfung von Abbildungen bilinear verhält.

BEISPIEL 2.8.2. (1) Kategorie aller Mengen. Objekte: Mengen. Morphismen: Abbildungen.

(2) Kategorie aller Gruppen. Objekte: Gruppen. Morphismen: Gruppenhomomorphismen.

(3) Kategorie aller Ringe. Objekte: Ringe. Morphismen: Ringhomomorphismen.

(4) Kategorie $\mathrm{Mod}-R$ *aller* Moduln über einem Ring R.

(5) Kategorie aller topologischen Räume. Objekte: Topologische Räume. Morphismen: Stetige Abbildungen.

2.8.3 (Funktoren). Funktoren sind strukturbewahrende Abbildungen zwischen Kategorien. Seien $\mathcal{C}$ und $\mathcal{D}$ zwei Kategorien. Ein Funktor $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ sendet jedes Objekt X aus $\mathcal{C}$ auf ein Objekt $F(X)$ aus $\mathcal{D}$ und jeden Morphismus $X \xrightarrow{f} Y$ auf einen Morphismus $F(X) \xrightarrow{F(f)} F(Y)$, so dass stets gilt

(i) $F(gf) = F(g)F(f)$, wann immer die Komposition gf Sinn macht, und
(ii) $F(1_X) = 1_{F(X)}$.

Man hat also für je zwei Objekte X und Y strukturerhaltende Abbildungen

$$\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(X,Y) \longrightarrow \mathrm{Mor}_{\mathcal{D}}(F(X),F(Y)),\ \ f \mapsto F(f).$$

Sind zusätzlich $\mathcal{C}$ und $\mathcal{D}$ zwei K-Kategorien, und diese Abbildungen zusätzlich K-lineare Abbildungen, so sprechen wir von einem K-Funktor (oder einem Funktor von K-Kategorien).

Beispiel 2.8.4. (1) Ein A-Modul ist insbesondere eine Menge, eine A-lineare Abbildung ist insbesondere eine Abbildung. "Vergißt" man also die algebraische Struktur, so erhält man einen Funktor von $\mathrm{Mod}-A$ in die Kategorie aller Mengen. Man nennt einen solchen Funktor auch "Vergißfunktor".

(2) Für jeden A-Modul M ist $\mathrm{Rad}(M)$ wieder ein A-Modul. Aussage 2.4.2 besagt, dass sich eine A-lineare Abbildung $f : M \longrightarrow N$ einschränken lässt auf die Radikale, d. h. durch Einschränkung erhalten wir eine Abbildung $\mathrm{Rad}(f) : \mathrm{Rad}(M) \longrightarrow \mathrm{Rad}(N)$, wobei $\mathrm{Rad}(f)(x) = f(x)$ für alle $x \in \mathrm{Rad}(M)$ gilt. Dadurch erhält man einen Funktor $\mathrm{Rad} : \mathrm{mod}-A \longrightarrow \mathrm{mod}-A$.

2.8.5 (Äquivalenzen). Eine *Äquivalenz* ist ein Funktor $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$, so dass

(i) alle Abbildungen $\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(X,Y) \longrightarrow \mathrm{Mor}_{\mathcal{D}}(F(X),F(Y))$, $f \mapsto F(f)$ *bijektiv* sind, und
(ii) jedes Objekt Y in $\mathcal{D}$ isomorph ist zu $F(X)$ für ein Objekt X in $\mathcal{C}$.

Hierbei werden Isomorphismen wie üblich als invertierbare Morphismen definiert. Gibt es eine Äquivalenz zwischen zwei Kategorien, so heißen sie *äquivalent*.

Die Objekte in äquivalenten Kategorien entsprechen sich, zumindest bis auf Isomorphie, so dass zusätzlich auch die Morphismenstrukur bewahrt bleibt. Bis auf Isomorphie der Objekte haben äquivalente Kategorien völlig gleiche Eigenschaften.

Bemerkung 2.8.6. Sei $F : \mathrm{mod}-A \longrightarrow \mathrm{mod}-B$ eine Äquivalenz von K-Kategorien. Dann gilt:

(1) $X = 0$ genau dann wenn $F(X) = 0$. ($X = 0$ genau dann, wenn $1_X = 0_X$, genau dann, wenn $1_{F(X)} = F(1_X) = F(0_X) = 0_{F(X)}$, genau dann, wenn $F(X) = 0$.)

(2) $X \simeq Y$ genau dann, wenn $F(X) \simeq F(Y)$.

(3) Ist $f : X' \longrightarrow Y'$ ein Homomorphismus von B-Moduln, so gibt es A-Moduln X und Y, Isomorphismen $i : F(X) \longrightarrow X'$ und $j : F(Y) \longrightarrow Y'$, und einen Homomorphismus $g : X \longrightarrow Y$, so dass $f \circ i = F(g) \circ j$ gilt.

2.8.7 (Morita-Äquivalenz). Zwei K-Algebren A und B heißen Morita-äquivalent, falls die K-Kategorien $\mathrm{mod}-A$ und $\mathrm{mod}-B$ äquivalent sind.

Satz 2.8.8. *Sei A eine K-Algebra und n eine natürliche Zahl. Dann sind A und $\mathrm{M}_n(A)$ Morita-äquivalent. Genauer gilt: Die Zuordnung*

$$\Phi : \mathrm{mod}-A \longrightarrow \mathrm{mod}-\mathrm{M}_n(A),\ \ X \mapsto X^n$$

definiert eine Äquivalenz von K-Kategorien.

Beweis. Schreibt man die Elemente von X^n als Zeilen, so operiert $\mathrm{M}_n(A)$ in ersichtlicher Weise von rechts auf X^n, wodurch X^n zu einem $\mathrm{M}_n(A)$-Modul wird. Ist $u : X \longrightarrow Y$ A-linear, so ist $u^n : X^n \longrightarrow Y^n$, $[x_1,\ldots,x_n] \mapsto [u(x_1),\ldots,u(x_n)]$ offenbar $\mathrm{M}_n(A)$-linear.

Es ist offensichtlich, dass durch diese Definitionen Φ zu einem K-Funktor wird: Sind $u : X \longrightarrow Y$ und $v : Y \longrightarrow Z$ linear, so ist

$$\begin{aligned}\Phi(v \circ u)([x_1, \ldots, x_n]) &= [v \circ u(x_1), \ldots, v \circ u(x_n)] \\ &= v^n([u(x_1), \ldots, u(x_n)]) \\ &= \Phi(v) \circ \Phi(u)([u(x_1), \ldots, u(x_n)]),\end{aligned}$$

also $\Phi(v \circ u) = \Phi(v) \circ \Phi(u)$. Sind ferner u, $v : X \longrightarrow Y$ linear, so gilt

$$\begin{aligned}\Phi(u + v)([x_1, \ldots, x_n]) &= [(u + v)(x_1), \ldots, (u + v)(x_n)] \\ &= [u(x_1), \ldots, u(x_n)] + [v(x_1), \ldots, v(x_n)] \\ &= \Phi(u)([x_1, \ldots, x_n]) + \Phi(v)([x_1, \ldots, x_n]),\end{aligned}$$

also $\Phi(u + v) = \Phi(u) + \Phi(v)$, und ähnlich folgt $\Phi(u\alpha) = \Phi(u)\alpha$ für $\alpha \in K$, also ist der Funktor K-linear.

Offenbar ist für feste Moduln X und Y die Abbildung $\mathrm{Hom}_A(X, Y) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathrm{M}_n(A)}(X^n, Y^n)$, $u \mapsto u^n$ injektiv. Sie ist auch surjektiv: Sei $f : X^n \longrightarrow Y^n$ eine $\mathrm{M}_n(A)$-lineare Abbildung. Dann gibt es offenbar eine Matrix B mit Einträgen in $\mathrm{Hom}_A(X, Y)$, so dass f gegeben ist durch Rechtsmultiplikation mit B, also

$$f([x_1, \ldots, x_n]) = [x_1, \ldots, x_n] \cdot B.$$

(Dies folgt wie in Abschnitt 2.5.) Die $\mathrm{M}_n(A)$-Linearität bedeutet

$$[x_1, \ldots, x_n] \cdot C \cdot B = f([x_1, \ldots, x_n] \cdot C) = f([x_1, \ldots, x_n]) \cdot C = [x_1, \ldots, x_n] \cdot B \cdot C,$$

also $BC = CB$ für alle Matrizen $C \in \mathrm{M}_n(A)$. Nutzt man diese Bedingung für die Standardbasismatrizen $C = e_{ij}$ aus, so erhält man, dass es eine lineare Abbildung $u : X \longrightarrow Y$ gibt mit

$$B = \begin{pmatrix} u & & \\ & \ddots & \\ & & u \end{pmatrix}, \tag{2.8.1}$$

d. h. $f = u^n$. Also gilt $f = \Phi(u)$.

Es ist noch zu zeigen, dass es zu jedem $\mathrm{M}_n(A)$-Modul Y einen A-Modul X gibt mit $Y \simeq \Phi(X)$. Setze $e_i = e_{ii}$. Es gilt

$$e_i^2 = e_i, \quad e_i e_j = 0 \text{ für } i \neq j, \ \sum_{i=1}^{n} e_i = 1.$$

Damit bekommt man eine Zerlegung

$$Y = \bigoplus_{i=1}^{n} Y e_i$$

(denn $y = y \cdot 1 = \sum_{i=1}^{n} y e_i$; für die Eindeutigkeit multipliziere mit e_j). Jeder Summand Ye_i ist abgeschlossen gegen Rechtsmultiplikation mit Diagonalmatrizen: Eine solche hat die Form $\sum_{j=1}^{n} e_j a_j$, und es ist

$$y e_i (\sum_{j=1}^{n} e_j a_j) = y e_i e_i a_i = y e_i a_i = y a_i e_i,$$

und ya_i ist in Y für jedes $y \in Y$. Hierbei werden Elemente aus A mit Skalarmatrizen in $\mathrm{M}_n(A)$ identifiziert. Insbesondere ist dann jedes Ye_i ein A-Modul. Wegen $e_i e_{ij} = e_{ij} e_j$ und $e_{ij} e_{jk} = e_{ik}$ erhält man Isomorphismen

$$Y e_1 \longrightarrow Y e_j, \ x \mapsto x e_{1j},$$

und es folgt $Y \simeq (Ye_1)^n = \Phi(Ye_1)$. $\square$

2.8.9. Seien zwei K-Algebren A und B gegeben. Ist M ein A-Modul und N ein B-Modul, so ist $M \oplus N$ ein $A \times B$-Modul vermöge

$$(x, y) \cdot (a, b) = (xa, yb)$$

für alle $a \in A$, $b \in B$, $x \in M$ und $y \in N$.

Die Kategorie $\operatorname{mod} -A \times \operatorname{mod} -B$ besteht aus folgendem: Die Objekte sind Paare (M, N) mit $M \in \operatorname{mod} -A$ und $N \in \operatorname{mod} -B$. Ein Morphismus $(M, N) \xrightarrow{f} (M', N')$ ist gegeben durch ein Paar $f = (u, v)$, also $f(m, n) = (u(m), v(n))$, wobei $u : M \longrightarrow M'$ A-linear ist und $v : N \longrightarrow N'$ B-linear.

Satz 2.8.10. *Seien A und B zwei K-Algebren. Die Zuordnung*

$$\Phi : \operatorname{mod} -A \times \operatorname{mod} -B \longrightarrow \operatorname{mod} -(A \times B), \ (M, N) \mapsto M \oplus N$$

definiert eine Äquivalenz von K-Kategorien.

Beweis. Die Abbildung

$$\begin{array}{rcl} \operatorname{Hom}_A(M, N) \times \operatorname{Hom}_B(M', N') & \longrightarrow & \operatorname{Hom}_{A \times B}(M \oplus M', N \oplus N') \\ (u, v) & \mapsto & \begin{pmatrix} u & \\ & v \end{pmatrix} \end{array}$$

ist offenbar K-linear und injektiv. Sie ist auch surjektiv: Seien $e_1 = (1, 0)$, $e_2 = (0, 1) \in A \times B$. Es gilt

$$e_1^2 = e_1, \quad e_2^2 = e_2, \quad e_1 e_2 = 0 = e_2 e_1, \quad e_1 + e_2 = 1. \tag{2.8.2}$$

Sei nun $h : M \oplus N \longrightarrow M' \oplus N'$ eine $A \times B$-lineare Abbildung. Diese ist gegeben durch eine Matrix

$$h = \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{pmatrix}.$$

Linearität liefert $h(x \cdot e_1) = h(x)e_1$ und $h(x \cdot e_2) = h(x)e_2$ für alle $x \in M \oplus N$, und dies bedeutet, dass diese Matrix mit den Matrizen $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ vertauscht, und dies führt unmittelbar zu

$$h = \begin{pmatrix} h_{11} & \\ & h_{22} \end{pmatrix}.$$

Damit erhält man die gewünscht Surjektivität.

Wegen (2.8.2) erhält man weiter, dass für jeden $A \times B$-Modul Y gilt

$$Y = Ye_1 \oplus Ye_2 \simeq \Phi(Ye_1, Ye_2).$$

Damit ist der Satz bewiesen. □

Folgerung 2.8.11. *Sei A halbeinfache K-Algebra. Dann gibt es Divisionsalgebren $D_1, \ldots, D_t$, so dass die K-Kategorie* $\operatorname{mod} -A$ *äquivalent ist zur K-Kategorie*

$$\operatorname{mod}(D_1) \times \ldots \times \operatorname{mod}(D_t).$$

Beweis. Folgt nun aus dem Struktursatz von Wedderburn. □

Bemerkung 2.8.12. Um die Kategorie $\operatorname{mod}(D_1) \times \ldots \times \operatorname{mod}(D_t)$ zu verstehen, genügt es, die einzelnen Kategorien $\operatorname{mod}(D_i)$ zu studieren. Hierbei handelt es sich um die Kategorie endlichdimensionaler Vektorräume über einem Schiefkörper, wie man sie (bis auf die Nichtkommutativität) in der Linearen Algebra studiert.

KAPITEL 3

Das Jacobson-Radikal

In diesem Kapitel fahren wir fort mit der Annahme, dass A eine endlichdimensionale K-Algebra ist (K ein Körper), und dass Moduln endlich erzeugte Rechtsmoduln sind.

In diesem Kapitel betrachten wir beliebige endlichdimensionale Algebren und beweisen wichtige Eigenschaften über deren Radikal, dem Jacobson-Radikal.

3.1. Das Radikal einer Algebra

Das Radikal $\mathrm{Rad}(A)$ einer Algebra A wurde definiert als Radikal des Moduls A_A, ist also der Durchschnitt aller maximalen Rechtsideale in A. In Folgerung 2.4.3 wurde gezeigt, dass $\mathrm{Rad}(A)$ ein (zweiseitiges) Ideal ist. Wir werden hier zeigen, dass es übereinstimmt mit dem Durchschnitt aller maximalen Linksideale, so dass man eine links-rechts-Symmetrie hat.

Definition 3.1.1. Das Radikal $\mathrm{Rad}(A)$ einer Algebra A nennt man auch das *Jacobson-Radikal* von A. Häufig wird es auch mit $J(A)$ bezeichnet.

3.1.2 (Invertierbarkeit). $x \in A$ habe ein Rechtsinverses y, also mit $xy = 1$. Für jedes $a \in A$ gilt dann $a = (ax)y$, also ist die Rechtsmultiplikation mit y surjektiv. Da es sich um eine K-lineare Abbildung handelt, folgt aus der Endlichdimensionalität sogar die Bijektivität, und $(yx)y = y(xy) = y1 = y$ impliziert dann auch $yx = 1$. Eine ähnliche Betrachtung gilt für Linksinverse.

Fazit: In einer endlichdimensionalen Algebra sind einseitig (d. h. links- oder rechts-) invertierbare Elemente schon (zweiseitig) invertierbar.

Satz 3.1.3. *Das Jacobson-Radikal* $\mathrm{Rad}(A)$ *einer Algebra besteht aus genau den Elementen $x \in R$, so dass $1 - axb$ invertierbar ist für alle a, $b \in A$.*

Beweis. Sei $x \in \mathrm{Rad}(A)$. Da $\mathrm{Rad}(A)$ ein Ideal ist, folgt $axb \in \mathrm{Rad}(A)$ für alle a, $b \in A$, liegt also in jedem maximalen Rechtsideal. Dann hat $1-axb$ ein Rechtsinverses (und ist damit invertierbar nach der Vorbemerkung), bzw. gleichbedeutend $(1 - axb)A = A$: Angenommen, dies gilt nicht, also $(1-axb)A \neq A$. Dann gibt es ein maximales Rechtsideal $\mathfrak{m}$, welches $(1 - axb)A$ umfasst. Dann gilt aber

$$1 = (1 - axb) + axb \in \mathfrak{m},$$

und damit $\mathfrak{m} = A$, Widerspruch.

Sei umgekehrt $x \in A$, so dass $1-axb$ invertierbar ist für alle a, $b \in A$. Ist $x \notin \mathrm{Rad}(A)$, so gibt es ein maximales Rechtsideal $\mathfrak{m}$ mit $x \notin \mathfrak{m}$. Dann gilt $xA + \mathfrak{m} = A$, also gibt es $a \in A$ und $m \in \mathfrak{m}$ mit $1 = xa + m$, aber $m = 1 - xa$ ist invertierbar nach Voraussetzung, Widerspruch. □

Folgerung 3.1.4. *Das Jacobson-Radikal ist auch der Durchschnitt aller maximalen Linksideale, d. h.* $\mathrm{Rad}(A_A) = \mathrm{Rad}({}_AA)$.

Beweis. Die Bedingung im vorherigen Satz ist links-rechts-symmetrisch. Den Beweis des Satzes kann man daher genauso gut für Linksideale führen. □

Der Beweis des Satzes zeigt auch:

Folgerung 3.1.5. *Sei $x \in A$, so dass $1 - xa$ invertierbar ist für jedes $a \in A$. Dann ist $x \in \mathrm{Rad}(A)$. (Selbiges gilt, für $1 - ax$.)*

Folgerung 3.1.6. *Sei I ein Rechtsideal oder Linksideal, in dem jedes Element x nilpotent ist. Dann gilt $I \subseteq \mathrm{Rad}(A)$.*

Beweis. Ist $x^n = 0$, so gilt

$$(1 - x) \cdot \Big(\sum_{i=0}^{n-1} x^i\Big) = 1,$$

also ist $1 - x$ invertierbar. Liegt nun x in dem Rechtsideal I, und ist $a \in A$, so ist $xa \in I$, also xa nilpotent, also $1 - xa$ invertierbar nach der Vorüberlegung. Damit ist $x \in \mathrm{Rad}(A)$ nach der vorherigen Folgerung. □

Satz 3.1.7. $\mathrm{Rad}(A)$ *ist der Durchschnitt aller Annullatoren von einfachen A-Moduln. (Aussage gilt auch für Linksmoduln.)*

Beweis. Ein einfacher Modul S ist isomorph zu $A/\mathfrak{m}$ für ein maximales Rechtsideal, und umgekehrt ist für jedes maximale Rechtsideal $\mathfrak{m}$ der Faktormodul $A/\mathfrak{m}$ einfach. Nach Übung 1.3.9 ist $\mathrm{Ann}_A(A/\mathfrak{m})$ das größte Ideal, welches in $\mathfrak{m}$ enthalten ist. Es folgt also

$$\bigcap_{S \text{ einf.}} \mathrm{Ann}_A(S) \subseteq \bigcap_{\mathfrak{m} \text{ max.}} \mathfrak{m} = \mathrm{Rad}(A).$$

Umgekehrt, $\mathrm{Rad}(A)$ ist ein Ideal, welches in jedem maximalen Rechtsideal $\mathfrak{m}$ enthalten ist, also wegen der genannten Maximalitätseigenschaft auch in $\mathrm{Ann}_A(A/\mathfrak{m})$. Es folgt also $\bigcap_{S \text{ einf.}} \mathrm{Ann}_A(S) = \mathrm{Rad}(A)$. □

3.2. Das Lemma von Nakayama

Lemma 3.2.1. *Sei $J = \mathrm{Rad}(A)$ und M ein A-Modul. Dann gilt $MJ \subseteq \mathrm{Rad}(M)$.*

Beweis. Für jedes $y \in M$ ergibt die Zuordnung $a \mapsto ya$ einen Homomorphismus $f : A \longrightarrow M$. Nach Satz 2.4.2 gilt $f(J) \subseteq \mathrm{Rad}(M)$, also $yJ \subseteq \mathrm{Rad}(M)$. □

Satz 3.2.2 (Das Lemma von Nakayama). *Sei $J = \mathrm{Rad}(A)$ und M ein (endlich erzeugter) A-Modul. Gilt $MJ = M$, so ist $M = 0$.*

Beweis. Nehme $M \neq 0$ an. Dann hat M einen maximalen Untermodul N. Nach dem vorherigen Lemma folgt dann $MJ \subseteq N \subsetneq M$. □

3.2.3. Eine Beweisvariante: Es gelte $MJ = M$. Nehme $M \neq 0$ an. Sei $x_1, \ldots, x_n$ ein Erzeugendensystem von M. Man kann annehmen, dass die Anzahl $n \geq 1$ dabei minimal ist. Nun ist $x_n \in M = MJ$, und es folgt dass man x_n schreiben kann in der Form

$$x_n = \sum_{i=1}^{n} x_i a_i \quad \text{mit } a_i \in J.$$

Dann ist

$$x_n(1 - a_n) = \sum_{i=1}^{n-1} x_i a_i.$$

Da nach Satz 3.1.3 das Element $1 - a_n$ invertierbar ist, folgt, dass x_n schon in dem von $x_1, \ldots, x_{n-1}$ erzeugten Untermodul liegt, d. h. M wird schon von $x_1, \ldots, x_{n-1}$ erzeugt. Widerspruch zur Minimalität von n.

Bemerkung 3.2.4. Das Lemma von Nakayama mag etwas unscheinbar wirken. Es handelt sich aber um eine außerordentlich häufig benutzte Aussage in der Algebra, insbesondere auch in der Kommutativen Algebra.

ÜBUNG 3.2.5. Sei I ein Rechtsideal in A. Sei M ein Modul und N ein Untermodul. Man zeige

$$(M/N) \cdot I = (N + MI)/N.$$

ÜBUNG 3.2.6. Man beweise folgende erweiterte Version vom Lemma von Nakayama:

Sei $I \subseteq A$ ein Rechtsideal. Dann sind äquivalent:

(i) $I \subseteq \operatorname{Rad}(A)$.
(ii) Für jeden (endlich erzeugten) A-Modul M gilt: Aus $MI = M$ folgt $M = 0$.
(iii) Für jeden (endlich erzeugten) A-Modul M gilt: Ist $N \subseteq M$ ein Untermodul mit $N + MI = M$, dann gilt $N = M$.

ÜBUNG 3.2.7. Sei $J = \operatorname{Rad}(A)$, und M ein A-Modul. Man zeige (Lemma 3.2.1 verbessernd), dass $MJ = \operatorname{Rad}(M)$ gilt.

ÜBUNG 3.2.8. Sei $J = \operatorname{Rad}(A)$ und M ein A-Modul. Man zeige $\operatorname{Soc}(M) = \{u \in M \mid u \cdot J = 0\}$.

3.3. Struktur endlichdimensionaler Algebren

Für ein (Links-/Rechts-/zweiseitiges) Ideal I sei I^n die Menge aller endlichen Summen von Produkten der Form $a_1 a_2 \dots a_n$ mit $a_i \in I$. Dies ist wieder ein (Links-/Rechts-/zweiseitiges) Ideal.

SATZ 3.3.1 (Struktursatz für endlichdimensionale Algebren). *Sei A eine endlichdimensionale Algebra. Dann gilt:*

(i) *Das Radikal $J = \operatorname{Rad}(A)$ von A ist nilpotent, d. h. es gibt eine natürliche Zahl n mit $J^n = 0$.*
(ii) *Die Faktoralgebra $A/\operatorname{Rad}(A)$ ist halbeinfach.*

BEWEIS. (i) Die Potenzen von J bilden eine absteigende Kette von Idealen

$$J \supset J^2 \supset J^3 \supset \dots \supset J^i \supset J^{i+1} \supset \dots$$

deren K-Dimensionen folglich immer kleiner werden. Es muss dann einen Index n geben, so dass $J^n = J^{n+1}$, also $J^n \cdot J = J^n$. Natürlich ist J^n endlich erzeugt, und mit dem Lemma von Nakayama folgt $J^n = 0$.

(ii) Dies folgt sofort aus Satz 2.4.6. □

FOLGERUNG 3.3.2. $\operatorname{Rad}(A)$ *ist das größte Ideal, in dem alle Elemente nilpotent sind.*

BEMERKUNG 3.3.3. Sei n wie im Satz. Im Jacobson-Radikal ist nicht nur jedes Element nilpotent, sogar jedes Produkt $a_1 a_2 \dots a_n$ von n-Elementen in $\operatorname{Rad}(A)$ ist 0.

PROPOSITION 3.3.4. *Sei $J = \operatorname{Rad}(A)$.*

(i) *Sei S ein einfacher A-Modul. Dann ist $SJ = 0$, und folglich ist S ein einfacher A/J-Modul.*
(ii) *Die (Isomorphieklassen der) einfachen A-Moduln entsprechen bijektiv den (Isomorphieklassen der) einfachen A/J-Moduln.*

BEWEIS. Nach Lemma 3.2.1 gilt $SJ \subseteq \operatorname{Rad}(S) = 0$. Es folgt $J \subseteq \operatorname{Ann}_A(S)$. Nach 1.3.7 ist S auch ein A/J-Modul. Nach Übung 1.3.10 hat S als A-Modul dieselben Untermoduln wie als A/J-Modul (was trivialerweise aus der Definition der A/J-Modulstruktur folgt, die gegeben ist durch $x \cdot (a + J) \overset{def}{=} xa$). Daher ist S auch einfacher A/J-Modul. Dies zeigt (i), und (ii) ergibt sich dann auch aus dem letzten Argument. □

FOLGERUNG 3.3.5. *Jeder einfache A-Modul ist isomorph zu einem einfachen Summanden von $A/\operatorname{Rad}(A)$. Insbesondere gibt es bis auf Isomorphie nur endlich viele einfache A-Moduln.*

Beweis. Die Anzahl der Isomorphieklassen einfacher A-Moduln ist gegeben durch die Anzahl der Matrixalgebren in der Zerlegung der halbeinfachen Algebra $A/\operatorname{Rad}(A)$. $\square$

Übung 3.3.6. Sei

$$A = \begin{pmatrix} K & K & \dots & K \\ 0 & K & \dots & K \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & & K \end{pmatrix} \subseteq \mathrm{M}_n(K)$$

die Algebra der oberen $n \times n$-Dreiecksmatrizen über dem Körper K. Man bestimme das Jacobson-Radikal von A.

KAPITEL 4

Unzerlegbarkeit

In diesem Kapitel fahren wir fort mit der Annahme, dass A eine endlichdimensionale K-Algebra ist (K ein Körper), und dass Moduln endlich erzeugte Rechtsmoduln sind.

Ein einfacher Modul ist stets unzerlegbar. Im Kapitel über Halbeinfachkeit haben wir gesehen, dass über einer halbeinfachen Algebra auch die Umkehrung gilt. Die Halbeinfachheit der Algebra ist sogar äquivalent dazu. Über einer beliebigen endlichdimensionalen Algebra weichen die Konzepte also voneinander ab. Das Hauptergebnis dieses Abschnittes wird der Satz von Krull-Schmidt sein, der besagt, dass sich jeder Modul (unter oben gemachten Voraussetzungen) in eindeutiger Weise in eine direkte Summe von unzerlegbaren Moduln zerlegen läßt. Dieses Faktum rechtfertigt es, dass in der Darstellungstheorie von Algebren häufig nur unzerlegbare Moduln untersucht werden.

4.1. Lokale Algebren

Für eine endlichdimensionale Algebra A ist $A/\operatorname{Rad}(A)$ ein Produkt von Matrizenringen über Divisionsalgebren. Die folgende Situation ist sehr speziell (ein Faktor, nur 1×1-Matrixring).

Definition 4.1.1. Eine Algebra A heißt *lokal*, falls $A/\operatorname{Rad}(A)$ eine Divisionsalgebra ist.

Satz 4.1.2. *Folgende Aussagen über die Algebra A sind äquivalent:*
(i) *A ist lokal.*
(ii) *A enthält genau ein maximales Rechtsideal.*
(ii') *A enthält genau ein maximales Linksideal.*
(iii) *$A \neq 0$, und die Summe von zwei Nichteinheiten ist stets wieder eine Nichteinheit.*

In dem Fall ist $J = \operatorname{Rad}(A)$ die Menge der Nichteinheiten, und ist das einzige maximale Rechtsideal wie auch das einzige maximale Linksideal.

Beweis. (i)⇒(ii) und (ii'): Sei A lokal, also A/J Divisionsalgebra. Dann ist J ein maximales Rechtsideal in A (vgl. etwa Übung 2.7.8), denn in einer Divisionsalgebra gibt es außer 0 und der Algebra selbst keine weiteren Rechtsideale. Da J der Durchschnitt aller maximalen Rechtsideal ist, muss J das einzige maximale Rechtsideal sein. Das gleiche Argument gilt auch für Linksideale (wegen 3.1.4).

(ii) oder (ii') ⇒(i): Ist $\mathfrak{m}$ das einzige maximale Rechtsideal, so ist $\mathfrak{m} = J$ und A/J einfacher A-Modul, also Divisionsalgebra nach dem Lemma von Schur. Die Version für Linksideale folgt analog. (Man beachte, dass eine Algebra A Divisionsalgebra offenbar genau dann ist, wenn dies für A^{op} gilt.)

(ii)⇒(iii): Seien x und y zwei Nichteinheiten. Dann haben x und y beide keine Rechtsinversen (siehe 3.1.2), d. h. $xR \neq R$ und $yR \neq R$. Ist $\mathfrak{m} = J$ das einzige maximale Rechtsideal, so folgt x, $y \in \mathfrak{m}$, und daher auch $x + y \in \mathfrak{m}$. Also ist auch $x + y$ nicht invertierbar.

(iii)⇒(ii): Jedes Produkt mit einer Nichteinheit ist wieder eine Nichteinheit (folgt unmittelbar aus 3.1.2), und wegen (iii) bilden daher die Nichteinheiten ein (zweiseitiges) Ideal I. Da echte Rechts- oder Linksideale keine Einheiten enthalten, sind sie alle in I

enthalten. I bildet also sowohl das einzige maximale Rechtsideal wie das einzige maximale Linksideal und stimmt mit J überein.

Der Zusatz folgt aus dem gerade Bewiesenen. □

ÜBUNG 4.1.3. Sei K ein Körper und sei $n \geq 1$. Man zeige, dass $K[T]/(T^n)$ eine lokale K-Algebra ist und bestimme das Radikal.

ÜBUNG 4.1.4. Sei K ein Körper und $K[[T]]$ die Algebra der *formalen* Potenzreihen $f = \sum_{n=0}^{\infty} a_n T^n$. Dabei ist dies nur eine andere Schreibweise für die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, es werden hier keine Konvergenzbetrachtungen angestellt. Multiplikation zweier formaler Potenzreihen wird (formal) durch das Cauchy-Produkt definiert.

(i) Man zeige, dass $f = \sum_{n=0}^{\infty} a_n T^n$ in $K[[T]]$ invertierbar ist genau dann, wenn $a_0 \neq 0$ gilt.

(ii) Man zeige, dass $K[[T]]$ lokal ist, und bestimme das Radikal.

ÜBUNG 4.1.5. Sei A eine lokale Algebra. Man zeige, dass 0 und 1 die einzigen Idempotente in A sind.

4.2. Endomorphismenringe unzerlegbarer Moduln

PROPOSITION 4.2.1 (Lemma von Fitting). *Sei M ein (endlich erzeugter) A-Modul und $f \in \mathrm{End}(M)$. Für genügend große $n \in \mathbb{N}$ gilt dann*

$$M = \mathrm{Kern}(f^n) \oplus \mathrm{Bild}(f^n).$$

BEWEIS. Setze zur Abkürzung $B_i = \mathrm{Bild}(f^i)$ und $K_i = \mathrm{Kern}(f^i)$. Dann hat man ab- bzw. aufsteigende Ketten von Untermoduln

$$\begin{array}{rcl} M &=& B_0 \supseteq B_1 \supseteq \ldots \supseteq B_i \supseteq B_{i+1} \supseteq \ldots \\ 0 &=& K_0 \subseteq K_1 \subseteq \ldots \subseteq K_i \subseteq K_{i+1} \subseteq \ldots \end{array}$$

Für $n > \dim(M_K)$ gilt $B_n = B_{n+1}$ und $K_n = K_{n+1}$, und damit

$$B_n = B_{2n} \quad \text{und} \quad K_n = K_{2n}.$$

Wir zeigen

$$M = B_n \oplus K_n.$$

$M = B_n + K_n$: Sei $x \in M$. Dann ist $f^n(x) \in B_n = B_{2n}$, also gibt es ein $y \in M$ mit $f^n(x) = f^n(f^n(y))$. Dann ist $x - f^n(y) \in K_n$, also $x = f^n(y) + (x - f^n(y)) \in B_n + K_n$.

$B_n \cap K_n = 0$: Sei $x \in B_n \cap K_n$. Dann gibt es $y \in M$ mit $x = f^n(y)$, und es gilt $f^{2n}(y) = f^n(x) = 0$, also $y \in K_{2n} = K_n$. Es folgt $x = f^n(y) = 0$. □

FOLGERUNG 4.2.2. *Sei M unzerlegbar. Dann ist jeder Endomorphismus von M nilpotent oder ein Automorphismus.*

BEWEIS. Sei $f \in \mathrm{End}(M)$. Nach dem Lemma von Fitting gibt es eine natürliche Zahl $n \geq 1$, so dass $M = \mathrm{Kern}(f^n) \oplus \mathrm{Bild}(f^n)$ gilt. Da M unzerlegbar ist, folgt $\mathrm{Bild}(f^n) = 0$, was $f^n = 0$, also f nilpotent bedeutet, oder $\mathrm{Kern}(f^n) = 0$. Im letzten Fall ist dann f^n injektiv, also auch f. Wegen der Endlichdimensionalität ist f auch surjektiv. □

SATZ 4.2.3. *Sei M ein unzerlegbarer A-Modul. Dann ist* $\mathrm{End}(M_A)$ *eine lokale Algebra.*

BEWEIS. Seien $f, g \in \mathrm{End}(M)$, so dass $f + g$ invertierbar ist, aber g nicht. Zu zeigen ist, dass f invertierbar ist. Es gibt einen Endomorphismus h mit $(f+g)h = 1_M$. Es ist mit g auch gh nicht invertierbar. Nach dem Lemma von Fitting ist gh nilpotent. Wir hatten schon gesehen, dass dann $1 - gh$ invertierbar ist; es ist aber $1 - gh = fh$. Also ist fh invertierbar, und dann auch f. □

ÜBUNG 4.2.4. Man zeige die Umkehrung vorstehenden Satzes: Ist M ein Modul, so dass $\mathrm{End}(M)$ lokal ist, so ist M unzerlegbar. (Dies gilt über beliebigen Ringen.)

4.3. Der Satz von Krull-Remak-Schmidt

Satz 4.3.1 (Krull-Remak-Schmidt). *Jeder endlich erzeugte Modul M über einer endlichdimensionalen Algebra A besitzt eine direkte Zerlegung*

$$M = M_1 \oplus \ldots \oplus M_n$$

in unzerlegbare Untermoduln M_i. Jede solche Zerlegung ist bis auf Isomorphie und Reihenfolge der Summanden eindeutig.

Beweis. Die *Existenz* einer solchen Zerlegung ergibt sich leicht durch Induktion nach der Dimension von M.

Zur *Eindeutigkeit*: Wir zeigen zunächst einen "Austauschsatz": Sei U ein unzerlegbarer Untermodul von M, der ein direkter Summand ist. Bezeichne mit $j : U \longrightarrow M$ bzw. $p : M \longrightarrow U$ die zugehörige Inklusion bzw. Projektion, so dass also $p \circ j = 1_U$ gilt. Bezeichne für jeden Summanden M_i die zugehörige Inklusion bzw. Projektion mit $j_i : M_i \longrightarrow M$ bzw. $p_i : M \longrightarrow M_i$. Es gilt

$$\begin{aligned} p_l \circ j_i &= \begin{cases} 1_{M_i} & i = l \\ 0 & i \neq l \end{cases} \\ \sum_{i=1}^{n} j_i \circ p_i &= 1_M. \end{aligned}$$

Es folgt

$$1_U = p \circ j = \sum_{i=1}^{n} p \circ j_i \circ p_i \circ j.$$

Nach Satz 4.2.3 ist $\mathrm{End}_A(U)$ lokal. Daher muss einer der Summanden $p \circ j_i \circ p_i \circ j$ ein Isomorphismus sein. Es folgt dann, dass es einen Homomorphismus $h : M_i \longrightarrow U$ geben muss mit $h \circ (p_i \circ j) = 1_U$ (man sagt: $p_i \circ j$ ist aufspaltender Monomorphismus; dies bedeutet gerade, dass die durch diesen Monomorphismus kanonisch induzierte kurze exakte Folge aufspaltet), und dann ist U isomorph zu einem direkten Summanden von M_i (vgl. 1.6.3). Wegen der Unzerlegbarkeit von M_i ist $p_i \circ j$ ein Isomorphismus. Es gilt also $U \simeq M_i$, und der Isomorphismus $p_i \circ j$ liefert eine Aufspaltung (vgl. 1.6.3)

$$M = \mathrm{Bild}(j) \oplus \mathrm{Kern}(p_i),$$

was schließlich zu einer Zerlegung

$$M = U \oplus \big(M_1 \oplus \ldots \oplus \widehat{M_i} \oplus \ldots \oplus M_n\big)$$

führt. Hierbei bedeutet die Bezeichnung $\widehat{M_i}$, dass der Summand M_i wegzulassen ist.

Seien nun $M = M_1 \oplus \ldots \oplus M_n$ und $M = M_1' \oplus \ldots \oplus M_m'$ zwei direkte Zerlegungen von M in unzerlegbare Untermoduln. Nach evtl. Umnummerierung kann man nach dem obigen Austauschargument annehmen, dass $M_1 \simeq M_1'$ gilt sowie

$$M_1' \oplus \big(M_2 \oplus \ldots \oplus M_n\big) = M = M_1' \oplus \big(M_2' \oplus \ldots \oplus M_m'\big).$$

Es folgt (vgl. Übung 2.3.5)

$$M_2 \oplus \ldots \oplus M_n \simeq M/M_1' \simeq M_2' \oplus \ldots \oplus M_m'.$$

Nach Anwendung von Isomorphismen kann man annehmen, dass die M_i und M_j' *Unter*moduln von M/M_1' sind. Per Induktion nach n kann man nun annehmen, dass $n = m$ gilt und nach evtl. Umnummerierung $M_2 \simeq M_2', \ldots, M_n \simeq M_n'$. □

Bemerkung 4.3.2. Obiger Satz wird in der Literatur meist nach Krull-Schmidt benannt, seltener (aber richtiger) auch als "Satz von Krull-Remak-Schmidt" bezeichnet, nach Wolfgang Krull (1899-1970), Robert Remak (1888-1942) und Otto Schmidt (1891-1956). Remak hat in seiner Doktorarbeit 1911 als Spezialfall einen solchen Zerlegungssatz für endliche Gruppen bewiesen, welcher später von Krull und von Schmidt in unterschiedlicher

Weise verallgemeinert wurde. Ein noch allgemeinerer Satz (für unendliche Indexmengen) geht zurück auf G. Azumaya (um 1950).

KAPITEL 5

Projektive Moduln

In diesem Kapitel fahren wir fort mit der Annahme, dass A eine endlichdimensionale K-Algebra ist (K ein Körper), und dass Moduln endlich erzeugte Rechtsmoduln sind.

Halbeinfachheit einer Algebra ist äquivalent dazu, dass jeder Modul projektiv ist. In allgemeiner Situation sind projektive Moduln aber sehr speziell. Deren Struktur soll hier untersucht werden.

5.1. Projektive Hüllen

PROPOSITION 5.1.1. *Sei P ein unzerlegbarer projektiver A-Modul. Dann ist* $\mathrm{Rad}(P)$ *der einzige maximale Untermodul von P. Es ist also $P/\mathrm{Rad}(P)$ ein einfacher A-Modul.*

BEWEIS. Wegen $P \neq 0$ besitzt P einen maximalen Untermodul. Wir nehmen an, es gebe zwei verschiedene maximale Untermoduln U_1 und U_2. Dann gilt $U_1 + U_2 = P$. Seien j_i die zugehörigen Inklusionen. Dann ist $j_1 \oplus j_2 : U_1 \oplus U_2 \longrightarrow P$, $(u_1, u_2) \mapsto u_1 + u_2$ ein Epimorphismus. Da P projektiv ist, lässt sich die Identität $1_P : P \longrightarrow P$ bzgl. dieses Epimorphismus liften:

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[dl, dashed, "h"'] \arrow[d, "1_P"] & \\ U_1 \oplus U_2 \arrow[r, "j_1 \oplus j_2"] & P \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Bezeichnet $h_i : P \longrightarrow U_i$ die i-te Komponentenabbildung von h, so folgt also $j_1 \circ h_1 + j_2 \circ h_2 = 1_P$. Da der Ring $\mathrm{End}_A(P)$ lokal ist, muss einer der beiden Summanden, etwa $j_1 \circ h_1$, ein Isomorphismus sein. Dann ist aber die Inklusion j_1 surjektiv, also $U_1 = P$, Widerspruch. $\square$

DEFINITION 5.1.2 (Projektive Hülle). Sei M ein A-Modul. Ein Epimorphismus $\varphi : P \longrightarrow M$ heißt *projektive Hülle* von M, wenn P projektiv ist und $\mathrm{Kern}(\varphi) \subseteq \mathrm{Rad}(P)$ gilt. Häufig nennt man auch nur den Modul P eine projektive Hülle von M, wenn klar ist, welcher Epimorphismus gemeint ist.

FOLGERUNG 5.1.3. *Sei P ein unzerlegbar projektiver Modul und S der einfache Modul $P/\mathrm{Rad}(P)$. Dann ist P eine projektive Hülle von S.*

SATZ 5.1.4 (Eindeutigkeit). *Sei M ein A-Modul und seien $\varphi : P \longrightarrow M$ und $\psi : Q \longrightarrow M$ projektive Hüllen. Dann gibt es einen Isomorphismus $\varepsilon : P \longrightarrow Q$ mit $\psi \circ \varepsilon = \varphi$.*

BEWEIS. Da ψ ein Epimorphismus und P projektiv ist, gibt es einen Homomorphismus $\varepsilon : P \longrightarrow Q$ mit $\psi \circ \varepsilon = \varphi$:

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[dl, dashed, "\varepsilon"'] \arrow[d, "\varphi"] & \\ Q \arrow[r, "\psi"] & M \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Wegen $\psi(\varepsilon(P)) = M$ gilt $Q = \varepsilon(P) + \mathrm{Kern}(\psi)$. (Denn: Sei $x \in Q$. Dann gibt es ein $y \in P$ mit $\psi(x) = \psi(\varepsilon(y))$. Dann ist $x - \varepsilon(y) \in \mathrm{Kern}(\psi)$ und $x = (x - \varepsilon(y)) + \varepsilon(y) \in$

$\mathrm{Kern}(\psi)+\varepsilon(P)$.) Wegen $\mathrm{Kern}(\psi) \subseteq \mathrm{Rad}(Q) \overset{3.2.7}{=} QJ$ folgt mit dem Lemma von Nakayama (vgl. Übung 3.2.6) $\varepsilon(P) = Q$. Also ist ε surjektiv. Dies liefert eine kurze exakte Folge

$$0 \longrightarrow N \xrightarrow{\subset} P \xrightarrow{\varepsilon} Q \longrightarrow 0$$

mit $N = \mathrm{Kern}(\varepsilon)$. Da Q wiederum projektiv ist, spaltet diese Folge auf (vgl. Übung 1.8.2), und es folgt, dass N ein direkter Summand von P ist (vgl. 1.6.3), etwa $P = N \oplus C$. Ist $x \in P$ mit $\varepsilon(x) = 0$, so gilt $\varphi(x) = \psi \circ \varepsilon(x) = 0$, also $N = \mathrm{Kern}(\varepsilon) \subseteq \mathrm{Kern}(\varphi) \subseteq \mathrm{Rad}(P)$. Aus $P = N \oplus C$ folgt $\mathrm{Rad}(P) = \mathrm{Rad}(N) \oplus \mathrm{Rad}(C)$, und dann $N = \mathrm{Rad}(N)$, was aber $N = 0$ bedeutet. Also ist ε auch injektiv. □

Proposition 5.1.5. *Jeder einfache Modul S hat eine projektive Hülle $P(S)$. Diese ist zu einem unzerlegbaren direkten Summanden von A_A isomorph.*

Beweis. Sei $A = P_1 \oplus \ldots \oplus P_n$ eine direkte Zerlegung von A_A in unzerlegbare Summanden. Jedes P_i ist projektiv. Es gilt $\mathrm{Rad}(A) = \mathrm{Rad}(P_1) \oplus \ldots \oplus \mathrm{Rad}(P_n)$, also ist nach Proposition 5.1.1

$$A/\mathrm{Rad}(A) = P_1/\mathrm{Rad}(P_1) \oplus \ldots \oplus P_n/\mathrm{Rad}(P_n)$$

die Zerlegung von $A/\mathrm{Rad}(A)$ in einfache Summanden. Jeder einfache A-Modul ist nach Folgerung 3.3.5 zu einem solchen Summanden $P_i/\mathrm{Rad}(P_i)$ isomorph; dieser hat P_i als projektive Hülle. □

Satz 5.1.6 (Existenz). *Jeder A-Modul M hat eine projektive Hülle.*

Beweis. Es ist $M/\mathrm{Rad}(M)$ ein halbeinfacher Modul, also

$$M/\mathrm{Rad}(M) = S_1 \oplus \ldots \oplus S_n$$

eine direkte Summe von einfachen A-Moduln (äquivalent: A/J-Moduln) S_i. Nach der zuvor bewiesenen Aussage hat jedes S_i eine projektive Hülle $\pi_i : P_i \longrightarrow S_i$. Setze $P = P_1 \oplus \ldots \oplus P_n$. Der Homomorphismus $\pi = \pi_1 \oplus \ldots \oplus \pi_n$ ist eine Surjektion $\pi : P \longrightarrow M/\mathrm{Rad}(M)$ mit $\mathrm{Kern}(\pi) = \mathrm{Rad}(P_1) \oplus \ldots \oplus \mathrm{Rad}(P_n) = \mathrm{Rad}(P)$.

Da P projektiv ist, faktorisiert π durch den kanonischen Epimorphismus $\nu : M \longrightarrow M/\mathrm{Rad}(M)$. Es gibt also einen Homomorphismus $\varphi : P \longrightarrow M$ mit $\nu \circ \varphi = \pi$. Dann folgt mit dem Lemma von Nakayama wie im Beweis von Satz 5.1.4, dass φ surjektiv ist. Da $\mathrm{Kern}(\varphi)$ in $\mathrm{Kern}(\pi) = \mathrm{Rad}(P)$ liegt, ist $\varphi : P \longrightarrow M$ eine projektive Hülle. □

Der Beweis zeigt auch:

Satz 5.1.7. *Jeder projektive A-Modul ist bis auf Isomorphie eine direkte Summe von projektiven Hüllen einfacher A-Moduln.*

Satz 5.1.8. *Die Zuordnung $P \mapsto P/\mathrm{Rad}(P)$ induziert eine Bijektion von der Menge der Isomorphieklassen unzerlegbarer projektiver A-Moduln in die Menge der Isomorphieklassen einfacher A-Moduln; die Umkehrabbildung wird induziert durch die Zuordnung $S \mapsto P(S)$.*

Übung 5.1.9. Sei $\varphi : P \longrightarrow M$ eine projektive Hülle und $\psi : Q \longrightarrow M$ ein Epimorphismus, wobei Q projektiv ist. Man zeige, dass $Q = P' \oplus P''$ gilt, wobei $P' \simeq P$. (D. h. P ist direkter Summand von Q; in diesem Sinne ist die projektive Hülle der kleinste projektive Modul P, der epimorph auf M abbildet.)

5.2. Projektive Moduln und idempotente Elemente

Es wurde im vorherigen Abschnitt gezeigt, dass jeder unzerlegbare projektive A-Modul isomorph ist zu einem direkten Summanden von A_A. Diese werden hier genauer berschrieben.

Satz 5.2.1. (1) *Ein Untermodul P von A_A ist genau dann ein direkter Summand von A_A, wenn es ein idempotentes Element $e \in A$ gibt mit $P = eA$.*

(2) *$P = eA$ (e idempotent) ist unzerlegbar genau dann, wenn aus $e = e_1 + e_2$, wobei e_1 und e_2 idempotent sind und $e_1e_2 = 0 = e_2e_1$ gilt, folgt, dass $e_1 = 0$ oder $e_2 = 0$ ist.*

(3) *Ist $P = eA = P_1 \oplus \ldots \oplus P_n$, so gibt es idempotente $e_1, \ldots, e_n$ mit $e = e_1 + \cdots + e_n$ und mit $e_ie_j = 0 = e_je_i$ für alle $i \neq j$.*

Beweis. Sei P ein direkter Summand, $A = P \oplus Q$. Dann gibt es $e \in P$ und $f \in Q$ mit $1 = e + f$. Dann ist

$$e - e^2 = (1 - e)e = fe \in P \cap Q = 0,$$

also $e = e^2$ und $fe = 0$. Genauso folgt $f^2 = f$ und $ef = 0$.

Ist umgekehrt $e \in A$ idempotent, so ist auch $f = 1-e$ idempotent, und es gilt $1 = e+f$ sowie $ef = 0 = fe$. Es folgt sofort $A = eA \oplus fA$. Dies zeigt (1), aber (2) und (3) folgen durch analoge Argumente. □

Übung 5.2.2. Sei $J = \mathrm{Rad}(A)$. Seien e und f idempotente in A. Man zeige, dass $eA \simeq fA$ genau dann gilt, wenn $eA/eJ \simeq fA/fJ$.

Übung 5.2.3. Man bestimme bis auf Isomorphie alle unzerlegbaren Moduln über einer halbeinfachen Algebra.

Übung 5.2.4. Sei $A = K[T]/(T^n)$ ($n \geq 1$, K ein Körper). Man bestimme (bis auf Isomorphie) alle unzerlegbaren projektiven A-Moduln.

Übung 5.2.5. Sei

$$A = \begin{pmatrix} K & K & \ldots & K \\ 0 & K & \ldots & K \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & & K \end{pmatrix} \subseteq \mathrm{M}_n(K)$$

die Algebra der oberen $n \times n$-Dreiecksmatrizen über dem Körper K. Man bestimme ein Repräsentantensystem der unzerlegbaren projektiven A-Moduln.

5.3. Der Satz von Jordan-Hölder

Definition 5.3.1 (Kompositionsreihe). Sei M ein A-Modul. Ein aufsteigende Kette

$$0 = M_0 \subseteq M_1 \subseteq \ldots \subseteq M_{\ell-1} \subseteq M_\ell = M$$

von Untermoduln heißt eine *Kompositionsreihe* von M (oder auch Jordan-Hölder-Reihe), falls alle Faktoren $S_i = M_i/M_{i-1}$ einfache A-Moduln sind ($i = 1, \ldots, \ell$).

Bemerkung 5.3.2. Sei M endlichdimensional. Dann besitzt M eine Kompositionsreihe.

Beweis. Ist $M = 0$ oder einfach, so ist die Aussage klar. Seien Untermoduln $M_0, \ldots, M_{i-1}$ schon als Teil einer Kompositionsreihe konstruiert, wobei $M_{i-1} \subsetneq M$ gilt. Dann gibt es einen Untermodul M_i von M, der M_{i-1} echt umfasst und dabei minimale Dimension hat. Dann ist der Faktor M_i/M_{i-1} einfach. Da M endlichdimensional ist, bricht dieses Verfahren nach endlich vielen Schritt ab, d. h. es liegt eine Kompositionsreihe vor. □

Dem gerade geführten Beweis entnimmt man, dass M im allgemeinen mehrere Kompositionsreihen haben kann. Die einfachen Faktoren sind jedoch eindeutig bestimmt (bis auf Reihenfolge):

Satz 5.3.3 (Jordan-Hölder). *Sei M ein A-Modul und sei*

$$0 = M_0 \subseteq M_1 \subseteq \ldots \subseteq M_{\ell-1} \subseteq M_\ell = M$$

eine Kompositionsreihe. Die einfachen Faktoren $S_i = M_i/M_{i-1}$ ($i = 1, \ldots, \ell$) sind durch M bis auf Reihenfolge und Isomorphie eindeutig bestimmt.

Beweis. Sei S ein einfacher A-Modul mit projektiver Hülle $P = P(S)$. Sei $d_S M = \#\{i \mid 1 \leq i \leq \ell,\ S \simeq S_i\}$ die Anzahl der zu S isomorphen Faktoren in der gegebenen Kompositionsreihe. Es wird gezeigt, dass

$$d_S M = \frac{\dim_K \operatorname{Hom}_A(P, M)}{\dim_K \operatorname{End}_A(S)} \tag{5.3.1}$$

gilt, woraus folgt, dass die Anzahl $d_S M$ eine Invariante von M ist.

Der kanonische Epimorphismus $\pi : M_i \longrightarrow M_i/M_{i-1}$ induziert eine K-lineare Abbildung

$$\pi_* : \operatorname{Hom}(P, M_i) \longrightarrow \operatorname{Hom}(P, M_i/M_{i-1}),\ f \mapsto \pi \circ f,$$

die wegen der Projektivität von P surjektiv ist. Der Kern von π_* besteht aus allen $f \in \operatorname{Hom}(P, M_i)$ mit $f(P) \subseteq \operatorname{Kern}(\pi) = M_{i-1}$, also $\operatorname{Kern}(\pi_*) = \operatorname{Hom}(P, M_{i-1})$. Man erhält

$$\operatorname{Hom}(P, S_i) = \operatorname{Hom}(P, M_i/M_{i-1}) \simeq \operatorname{Hom}(P, M_i)/\operatorname{Hom}(P, M_{i-1}).$$

Übergang zu den Dimension liefert

$$\dim_K \operatorname{Hom}(P, S_i) = \dim_K \operatorname{Hom}(P, M_i) - \dim_K \operatorname{Hom}(P, M_{i-1}),$$

und summiert über alle $i = 1, \ldots, \ell$, so ergibt dies wegen $M_\ell = M$

$$\sum_{i=1}^{\ell} \dim_K \operatorname{Hom}(P, S_i) = \dim_K(P, M). \tag{5.3.2}$$

Für jedes $f \in \operatorname{Hom}(P, S_i)$ gilt $f(\operatorname{Rad}(P)) = 0$ (klar, falls $f = 0$; falls $f \neq 0$, ist $\operatorname{Kern}(f)$ maximal, also gleich $\operatorname{Rad}(P)$), also $\operatorname{Rad}(P) \subseteq \operatorname{Kern}(f)$. Mit dem Homomorphiesatz folgt $\operatorname{Hom}(P, S_i) \simeq \operatorname{Hom}(P/\operatorname{Rad}(P), S)$, und wegen $P/\operatorname{Rad}(P) \simeq S$ folgt

$$\operatorname{Hom}(P, S_i) \simeq \operatorname{Hom}(S, S_i) \simeq \begin{cases} \operatorname{End}(S) & S \simeq S_i \\ 0 & S \not\simeq S_i \end{cases}$$

mit dem Schurschen Lemma. Mit (5.3.2) folgt dann Formel (5.3.1). $\square$

5.3.4. (1) Aus dem Satz von Jordan-Hölder folgt insbesondere, dass die Anzahl $\ell = \ell(M)$ der Kompositionsfaktoren eine Invariante von M ist, die *Länge* von M.

(2) Sei $S_1, \ldots, S_n$ ein Repräsentantensystem der Isomorphieklassen der einfachen A-Moduln, mit festgelegter Reihenfolge. Die Vielfachheiten $d_{S_i} M = d_i$ liefern den *Dimensionsvektor*

$$\underline{\dim}(M) = (d_1, \ldots, d_n) \in \mathbb{Z}^n.$$

Dieser ist eine wichtige Invariante des Moduls M.

5.3.5. Eine Abbildung $h : \operatorname{mod}-A \longrightarrow H$, die auf den Objekten von $\operatorname{mod}-A$ definiert ist und in eine abelsche Gruppe H geht, heißt *additiv*, falls für jede kurze exakte Folge $0 \longrightarrow X \longrightarrow Y \longrightarrow Z \longrightarrow 0$ in $\operatorname{mod}-A$ gilt $h(Y) = h(X) + h(Z)$. (Es folgt insbesondere: Aus $X \simeq Y$ folgt $h(X) = h(Y)$.)

Übung 5.3.6. (1) Sei H eine abelsche Gruppe und $h : \operatorname{mod}-A \longrightarrow H$ eine Abbildung mit $h(M) = h(U) + h(M/U)$ für alle $M \in \operatorname{mod}-A$ und alle Untermoduln U von M, sowie $h(M) = h(M')$ für alle $M, M' \in \operatorname{mod}-A$ mit $M \simeq M'$. Man zeige, dass h additiv ist.

(2) Man untersuche, wie sich Kompositionsreihen unter Isomorphismen verhalten und schließe, dass der Dimensionsvektor zweier isomorpher Moduln gleich ist.

Folgerung 5.3.7. *Bilden des Dimensionsvektors liefert eine additive Funktion* $\underline{\dim} : \operatorname{mod}-A \longrightarrow \mathbb{Z}^n$. *Jede additive Funktion* $h : \operatorname{mod}-A \longrightarrow H$ *faktorisiert eindeutig über* $\underline{\dim}$, *d. h. es gibt einen eindeutigen Gruppenhomomorphismus* $\overline{h} : \mathbb{Z}^n \longrightarrow H$ *mit* $h = \overline{h} \circ \underline{\dim}$.

Beweis. Nach vorstehender Übung genügt es für die Additivität von $\underline{\dim}$ zu zeigen, dass $\underline{\dim}(M) = \underline{\dim}(U) + \underline{\dim}(M/U)$ für jeden Untermodul U von M gilt. Ist

$$0 = M_0 \subseteq M_1 \subseteq \ldots \subseteq M_{r-1} \subseteq M_r = U$$

eine Kompositionsreihe von U und

$$0 = M_r/U \subseteq M_{r+1}/U \subseteq \ldots \subseteq M_{\ell-1}/U \subseteq M_\ell/U = M/U$$

eine solche für M/U, so ergibt sich (mit 1.2.6 (2)), dass

$$0 = M_0 \subseteq M_1 \subseteq \ldots \subseteq M_r \subseteq M_{r+1} \subseteq \ldots \subseteq M_\ell = M$$

eine Kompositionsreihe von M ist, woraus die Additivität sofort folgt.

Sei $h : \bmod -A \longrightarrow H$ eine additive Funktion. Definiere $\overline{h} : \mathbb{Z}^n \longrightarrow H$ durch

$$\overline{h}(d_1, \ldots, d_n) \stackrel{def}{=} \sum_{i=1}^{n} d_i h(S_i).$$

Offenbar hat $\overline{h}$ die gewünschten Eigenschaften. Da $\underline{\dim}(S_i) = e_i$ der i-te Standardbasisvektor ist, folgt die Eindeutigkeit von $\overline{h}$. □

Bemerkung 5.3.8. Da $\mathbb{Z}^n$ eine "universelle" additive Funktion erlaubt, nennt man $\mathbb{Z}^n$ auch die *Grothendieckgruppe* von A und bezeichnet sie mit $\mathrm{K}_0(A)$.

Bemerkung 5.3.9. Obiger Beweis zeigt natürlich auch, dass die Längenfunktion $\ell :$ $\bmod -A \longrightarrow \mathbb{Z}$, $M \mapsto \ell(M)$ additiv ist.

Übung 5.3.10. Sei M ein beliebiger (nicht notwendig endlich erzeugter) Modul über einem beliebigen Ring. Man zeige, dass M endlich erzeugt ist, wenn M eine Kompositionsreihe hat.

KAPITEL 6

Dualität

6.1. Äquivalenzen und Dualitäten

Erinnerung: Ein K-Funktor F zwischen zwei K-Kategorien $\mathcal{C}$ und $\mathcal{D}$ heisst Äquivalenz, wenn

- F ist treu, d. h. $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(X),F(Y))$, $f \mapsto F(f)$ ist injektiv für alle X, $Y \in \mathcal{C}$;
- F ist voll, d. h. $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(X),F(Y))$, $f \mapsto F(f)$ ist surjektiv für alle X, $Y \in \mathcal{C}$;
- F ist dicht, d. h. zu jedem $Y \in \mathcal{D}$ existiert ein $X \in \mathcal{C}$ mit $Y \simeq F(X)$.

Seien $\mathcal{C}$ und $\mathcal{D}$ zwei K-Kategorien. Zwei K-Funktoren F, $G \colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ heissen isomorph, $F \simeq G$, falls es für jede jedes Objekt $X \in \mathcal{C}$ einen Isomorphismus $\eta_X \colon F(X) \to G(X)$ gibt, so dass für jeden Morphismus $X \xrightarrow{f} Y$ das Diagramm

$$\begin{tikzcd} F(X) \arrow[r, "F(f)"] \arrow[d, "\eta_X"'] & F(Y) \arrow[d, "\eta_Y"] \\ G(X) \arrow[r, "G(f)"] & G(Y) \end{tikzcd}$$

kommutiert. Man nennt dann $\eta \colon F \to G$ auch einen funktoriellen Isomorphismus.

Sind $F \colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ und $G \colon \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ zwei K-Funktoren, so heisst G (eine) Quasiinverse zu F (und umgekehrt), falls

$$F \circ G \simeq 1_{\mathcal{D}} \quad \text{und} \quad G \circ F \simeq 1_{\mathcal{C}}$$

gilt.

Lemma 6.1.1. *Sei $F \colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ ein K-Funktor. Äquivalent sind:*

(1) *F ist eine Äquivalenz.*
(2) *Zu F gibt es eine Quasiinverse $G \colon \mathcal{D} \to \mathcal{C}$.*

Beweis. (1)$\Rightarrow$(2): Sei F eine Äquivalenz, d. h. F is treu, voll und dicht. Sei $Y \in \mathcal{D}$. Dann gibt es ein $X \in \mathcal{C}$ mit $Y \simeq F(X)$. Wähle für jedes $Y \in \mathcal{D}$ ein solches $X \in \mathcal{C}$ und einen festen Isomorphismus $\varepsilon_Y \colon F(X) \xrightarrow{\sim} Y$. Definiere $G \colon \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ wie folgt: $G(Y) = X$, und ist $g \colon Y \to Y'$ ein Morphismus, so definiere $G(g) = f \colon X \to X'$, wobei f der eindeutige Morphismus ist, der das Diagramm

$$\begin{tikzcd} F(X) \arrow[r, "\varepsilon_Y"] \arrow[d, "F(f)"'] & Y \arrow[d, "g"] \\ F(X') \arrow[r, "\varepsilon_{Y'}"] & Y' \end{tikzcd}$$

kommutativ macht. Wegen dieser Eindeutigkeit folgt dann auch $G(gg') = G(g)G(g')$, und G ist ein K-Funktor. Es ist dann offenbar $\varepsilon \colon FG \to 1_{\mathcal{D}}$ ein funktorieller Isomorphismus. Definiere einen funktoriellen Isomorphismus $\varphi \colon GF \to 1_{\mathcal{C}}$ wie folgt: Für $\widetilde{X} \in \mathcal{C}$ definiere mit $Y := F(\widetilde{X})$ und $X = G(Y)$ die Abbildung $\varphi_{\widetilde{X}} \colon GF(\widetilde{X}) \to \widetilde{X}$ als den eindeutig definierten Morphismus $h\colon X = GF(\widetilde{X}) \to \widetilde{X}$ mit $F(h) = \varepsilon_Y\colon F(X) \to Y$. Offenbar ist $\varphi_{\widetilde{X}} = h$ ein Isomorphismus. Ist $f\colon \widetilde{X} \to \widetilde{X'}$ ein Morphismus in $\mathcal{C}$, so ist das Diagramm

$$\begin{tikzcd} GF(\widetilde{X}) \arrow[r, "\varphi_{\widetilde{X}}"] \arrow[d, "GF(f)"'] & \widetilde{X} \arrow[d, "f"] \\ GF(\widetilde{X'}) \arrow[r, "\varphi_{\widetilde{X'}}"] & \widetilde{X'} \end{tikzcd}$$

kommutativ, denn Anwendung des Funktors F liefert (mit $Y = F(\widetilde{X})$, $Y' = F(\widetilde{X'})$ und $g := F(f)$) das kommutative (!) Diagramm

$$\begin{tikzcd} FG(Y) \arrow[r, "\varepsilon_Y"] \arrow[d, "FG(g)"'] & Y \arrow[d, "g"] \\ FG(Y') \arrow[r, "\varepsilon_{Y'}"] & Y' \end{tikzcd}$$

Da F treu ist, ist auch das ursprüngliche Diagramm kommutativ.

(2)⇒(1): Sei G quasiinvers zu F. Für jedes $Y \in \mathcal{D}$ gilt $Y \simeq F(G(Y))$, also ist F dicht. Offenbar sind die identischen Funktoren voll und treu. Daher genügt es zu zeigen:

- Sind U und V isomorphe Funktoren, so ist U voll (bzw. treu) genau dann, wenn V voll (bzw. treu) ist.
- Sind U und V Funktoren, so dass $V \circ U$ voll (bzw. treu) ist, so ist V voll (bzw. U treu).

Dies verifiziert man leicht. □

Ein *kontravarianter* Funktor $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ hat die Eigenschaft $F(f \circ g) = F(g) \circ F(f)$ (Vertauschung!) für alle komponierbaren Morphismen f, g in $\mathcal{C}$; für $f\colon X \to Y$ hat man $F(f)\colon F(Y) \to F(X)$. Dies bedeutet nichts anderes, als dass $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}^{op}$ ein (kovarianter) Funktor ist. Eine kontravariante Äquivalenz nennt man auch Dualität. (Genauer: $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ Dualität genau dann, wenn $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ (kovariante) Äquivalenz ist.) Daher gilt das vorherige Resultat analog auch für Dualitäten.

6.2. Dualität zwischen Rechts- und Linksmoduln

Sei A eine endlichdimensionale Algebra über dem Körper K. Bezeichne mit $\mathrm{mod}(A)$ die Kategorie der endlich erzeugten (= endlichdimensionalen) A-Rechtsmoduln. Für $M \in \mathrm{mod}(A)$ definiere $D(M) = \mathrm{Hom}_K(M, K)$. Dies ist ein A-Linksmodul, vermöge

$$a \cdot \varphi(m) = \varphi(ma)$$

für alle $a \in A$, $\varphi \in \mathrm{Hom}_K(M, K)$ und $m \in M$. Ist umgekehrt, M ein A-Linksmodul, so ist $D(M) = \mathrm{Hom}_K(M, K)$ (wir benutzen denselben Buchstaben!) ein A-Rechtsmodul vermöge $\varphi \cdot a(m) = \varphi(am)$. Offenbar induziert D einen (kontravarianten) K-Funktor

$$D\colon \mathrm{mod}(A) \to \mathrm{mod}(A^{op}) \quad \text{sowie} \quad D\colon \mathrm{mod}(A^{op}) \to \mathrm{mod}(A),$$

wobei für Morphismen $\phi\colon M \to M'$ definiert wird $D(f)\colon \mathrm{Hom}_K(M', K) \to \mathrm{Hom}_K(M, K)$, $\phi \mapsto \phi \circ f$.

Satz 6.2.1. $D\colon \mathrm{mod}(A) \to \mathrm{mod}(A^{op})$ *ist eine Dualität mit Quasiinverser* $D\colon \mathrm{mod}(A^{op}) \to \mathrm{mod}(A)$, *d. h. es gilt*

$$D \circ D \simeq 1_{\mathrm{mod}(A)} \quad \textit{und} \quad D \circ D \simeq 1_{\mathrm{mod}(A^{op})}.$$

Beweis. Für $X \in \mathrm{mod}(A)$ ist $\eta\colon X \to D(D(X))$, $x \mapsto e_x$, wobei $e_x \in \mathrm{Hom}_K(\mathrm{Hom}_K(M, K), K)$ mit $e_x(\phi) = \phi(x)$. Es ist bekannt aus der Linearen Algebra, dass dies ein Isomorphismus von (endlichdimensionalen) K-Vektorräumen ist, und man zeigt, dass es sich sogar um einen Isomorphismus von A-Moduln handelt. Dieser ist auch funktoriell: Sei $f\colon X \to Y$ in $\mathrm{mod}(A)$. Dann kommutiert

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\eta_X} & D^2X \\ {\scriptstyle f}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle D^2 f} \\ Y & \xrightarrow{\eta_Y} & D^2Y \end{array}$$

Denn: Nach Definition schickt $D(D(f))$ ein $\phi \in \mathrm{Hom}_K(D(X), K)$ auf $\phi \circ D(f) \in \mathrm{Hom}_K(D(Y), K)$, also (mit $\phi = e_x$) gilt $D^2(f)(e_x) = e_x \circ D(f)$, das bedeutet für jedes $\psi \in \mathrm{Hom}_K(Y, K)$, dass

$$\begin{aligned} D^2(f)(e_x)(\psi) &= e_x \circ D(f)(\psi) = e_x(D(f)(\psi)) = e_x(\psi \circ f) \\ &= \psi \circ f(x) = \psi(f(x)) = e_{f(x)}(\psi), \end{aligned}$$

also

$$D^2(f)(e_x) = e_{f(x)},$$

was gerade bedeutet, dass obiges Diagramm kommutiert. □

6.3. Bisheriges kategorientheoretisch

Im folgenden seien alle Kategorien K-Kategorien, und alle Funktoren K-linear.

Lemma 6.3.1 (Monomorphismus). *Sei $\mathcal{C} = \mathrm{Mod}(A)$. Sei $f\colon X \to Y$ ein Morphismus in $\mathcal{C}$. Äquivalent sind:*

(1) *f ist ein Monomorphismus, d. h. f ist injektiv.*
(2) *Für alle Morphismen $g, h\colon Z \to X$ ($Z \in \mathcal{C}$) gilt: $fg = fh \quad \Rightarrow \quad g = h$.*
(3) *Für alle Morphismen $g\colon Z \to X$ ($Z \in \mathcal{C}$) gilt: $fg = 0 \quad \Rightarrow \quad g = 0$.*

Lemma 6.3.2 (Epimorphismus). *Sei $\mathcal{C} = \mathrm{Mod}(A)$. Sei $f\colon X \to Y$ ein Morphismus in $\mathcal{C}$. Äquivalent sind:*

(1) *f ist ein Epimorphismus, d. . f ist surjektiv..*
(2) *Für alle Morphismen $g, h\colon Y \to Z$ ($Z \in \mathcal{C}$) gilt: $gf = hf \quad \Rightarrow \quad g = h$.*
(3) *Für alle Morphismen $g\colon Y \to Z$ ($Z \in \mathcal{C}$) gilt: $gf = 0 \quad \Rightarrow \quad g = 0$.*

Die Eigenschaft (2) macht Sinn in jeder Kategorie, und definiert Mono- und Epimorphismen allgemein. Ähnliches gilt für den Begriff des Kerns:

Lemma 6.3.3 (Kern). *Sei $\mathcal{C} = \mathrm{Mod}(A)$. Sei $f\colon X \to Y$ ein Morphismus. Der Kern $K = \mathrm{Kern}(f) \xrightarrow{i} X$ hat die folgende universelle Eigenschaft:*

(i) *$fi = 0$.*
(ii) *Zu jedem Morphismus $j\colon Z \to X$ ($Z \in \mathcal{C}$) mit $fj = 0$ gibt es einen eindeutig bestimmten Morphismus $h\colon Z \to K$ mit $ih = g$.*

Das Paar $(Kern(f), i)$ ist bis auf (eindeutige) Isomorphie durch diese Eigenschaft bestimmt.

Beweis. Das Paar $(K = \mathrm{Kern}(f), i)$ (mit i die Inklusionsabbildung) erfüllt diese Eigenschaften: (i) ist klar; zu (ii): sei $j\colon Z \to X$ mit $fj = 0$. Dann gilt $\mathrm{Bild}(j) \subseteq \mathrm{Kern}(f)$, also gilt für den Morphismus $h\colon Z \to \mathrm{Kern}(f)$ mit $h(z) = j(z)$ für alle $z \in Z$ die Eigenschaft $ih = j$; ist $h'\colon Z \to \mathrm{Kern}(f)$ ein zweiter mit $ih' = j$, so gilt $ih = ih'$, und weil i ein Monomorphismus ist, folgt $h = h'$.

Umgekehrt folgt für einen Morphismus $i'\colon K' \to X$ mit diesen Eigenschaften (i) und (ii) (mit (K', i') statt (K, i)): (a) Es ist i' ein Monomorphismus, und (b) es gibt einen eindeutigen Isomorphismus $h\colon \mathrm{Kern}(f) \to K'$ mit $i'h = i$. Zu (a): Sei $g\colon Z \to K'$ mit $i'g = 0$. Insbesondere gilt $f(i'g) = 0$. Es ist also $g\colon Z \to K'$ der nach (ii) eindeutig bestimmte Morphismus $Z \to K'$ mit $i'g = 0$; es gilt aber auch $i'0 = 0$, also folgt $g = 0$. Zu (b): Man wendet (ii) einmal für (K, i) und noch einmal für (K', i') an. Das liefert eindeutig bestimmte Morphismen $h\colon K \to K'$ und $h'\colon K' \to K$ mit $i'h = i$ und $ih' = i'$. Erneut nach (ii) ist $h'h$ der eindeutig bestimmte Morphismus mit $i(h'h) = i$, aber es gilt auch $i1_K = i$, also $h'h = 1_K$. Analog $hh' = 1_{K'}$. □

Dual: Cokern.

Ein Objekt $P \in \mathcal{C}$ heisst projektiv, wenn für jeden Epimorphismus $Y \xrightarrow{g} Z$ und jeden Morphismus $P \xrightarrow{h} Z$ ein Morphismus $h'\colon P \to Y$ existiert mit $h = gh'$. “Dual” heisst ein Objekt $Q \in \mathcal{C}$ injektiv, wenn für jeden Monomorphismus $X \xrightarrow{f} Y$ und jeden Morphismus $X \xrightarrow{h} Q$ ein Morphismus $h\colon Y \to Q$ existiert mit $h = h'f$. Auch den Begriff einer projektiven Hülle kann man allgemeiner definieren/charakterisieren:

Lemma 6.3.4 (Projektive Hülle). *Sei $\mathcal{C} = \mathrm{Mod}(A)$ bzw. $\mathrm{mod}(A)$. Sei $\pi\colon P \to M$ ein Epimorphismus mit P projektiv. Äquivalent sind:*

(1) *(P, π) ist eine projektive Hülle von M (d. h. $\mathrm{Kern}(\pi) \subseteq \mathrm{Rad}(P)$).*
(2) *Ist $h\colon Z \to P$ ein Homomorphismus, so dass πh ein Epimorphismus ist, so ist h ein Epimorphismus.*

Beweis. (1)⇒(2) Sei (P, π) projektive Hülle von M. Sei $h\colon Z \to P$ ein Homomorphismus, so dass πh ein Epimorphismus ist. Sei $x \in P$. Dann gibt es $z \in Z$ mit $\pi(x) = \pi h(z)$, also $x - h(z) \in \mathrm{Kern}(\pi) \subseteq \mathrm{Rad}(P)$. Es folgt

$$x = x - h(z) + h(z) \in \mathrm{Rad}(P) + \mathrm{Bild}(h).$$

Es folgt $\mathrm{Bild}(h) = P$. Denn falls nicht, so gibt es einen maximalen Untermodul $N \subset P$ mit $\mathrm{Bild}(h) \subseteq U$. Aber dann ist $\mathrm{Rad}(P) + \mathrm{Bild}(h) \subseteq U \subsetneq P$, Widerspruch. Also ist h surjektiv.

(2)⇒(1) Sei $x \in K = \mathrm{Kern}(\pi)$. Sei $p\colon P \to P/K$ der natürliche Epimorphismus. Nach dem Homomorphiesatz gibt es einen Monomorphismus $\pi'\colon P/K \to M$ mit $\pi = \pi' p$, und π' ist dann auch ein Epimorphismus, also Isomorphismus. Es folgt: ist $h\colon Z \to P$ ein Homomorphismus, so ist πh ein Epimorphismus genau dann, wenn ph ein Epimorphismus ist, und dies gilt genau dann, wenn $\mathrm{Bild}(h) + K = P$ gilt. Dann man jeden Untermodul U von P als Bild eines h realisieren kann, hat der Untermodul K von P also die Eigenschaft, dass für jeden Untermodul U von P gilt: aus $K + U = P$ folgt $U = P$. (Man sagt: K ist ein kleiner (oder ein überflüssiger) Untermodul von P.) Zu zeigen ist, dass daraus $K \subseteq \mathrm{Rad}(P)$ folgt: angenommen, es gibt einen maximalen Untermodul N von P mit $K \not\subseteq N$. Dann gilt $K + N = P$, also folgt $N = P$, Widerspruch. Also ist K in jedem maximalen Untermodul von P enthalten, d. h. $K \subseteq \mathrm{Rad}(P)$. □

Sei M ein A-Modul. Es heisst ein Monomorhismus $i\colon M \to Q$ eine injektive Hülle, wenn I injektiv ist und $\mathrm{Soc}(I) \subseteq \mathrm{Bild}(i)$ gilt. Dual zur vorherigen Aussage für projektive Hüllen erhält man auch eine kategorientheoretische Definition für injektive Hüllen.

Ein Objekt $X \in \mathcal{C}$ ist das Nullobjekt, $X = 0$, wenn $1_X = 0_X$ gilt.

Lemma 6.3.5. *Sei $f\colon X \to Y$ ein Morphismus in $\mathcal{C}$.*

(1) *Es sind äquivalent:*
  (i) *f ist Monomorphismus.*
  (ii) $\mathrm{Kern}(f) = 0$.
(2) *Es sind äquvalent:*
  (i) *f ist Epimorphismus.*
  (ii) $\mathrm{Cokern}(f) = 0$.

Definition 6.3.6. Eine K-Kategorie $\mathcal{C}$ heisst abelsch, wenn folgende Eigenschaften gelten:

(AC1) $\mathcal{C}$ enthält Kerne und Cokerne.
(AC2) Jeder Monomorphismus ist ein Kern und jeder Epimorphismus ist ein Cokern.

(AC3) $\mathcal{C}$ enthält endliche direkte Summen (Coprodukte) und endliche Produkte. (Diese sind dann notwendig isomorph.)

In einer abelschen Kategorie gilt außerdem

(AC4) Jeder Morphismus $f: X \to Y$ lässt sich schreiben als $f = ip$ mit $p: B \to Y$ Epimorphismus und $i: X \to B$ Monomorphismus. (Es heisst dann B das Bild von f, $B = \mathrm{Bild}(f)$.

Beispiel 6.3.7. $\mathrm{Mod}(A)$ und $\mathrm{mod}(A)$ sind abelsche Kategorien.

Lemma 6.3.8. *Sei $\Phi: \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ eine Äquivalenz zwischen abelschen Kategorien. Sei $f: X \to X'$ ein Morphismus in $\mathcal{C}$. Dann*

(1) *f is Monomorphismus genau dann, wenn $\Phi(f)$ Monomorphismus ist.*
(2) *f is Epimorphismus genau dann, wenn $\Phi(f)$ Epimorphismus ist.*
(3) *(K, i) ist Kern von f in $\mathcal{C}$ genau dann, wenn $(\Phi K, \Phi i)$ Kern von $\Phi(f)$ ist.*
(4) *(C, p) ist Cokern von f in $\mathcal{C}$ genau dann, wenn $(\Phi C, \Phi p)$ Cokern von $\Phi(f)$ ist.*
(5) *(P, π) ist projektive Hülle von M in $\mathcal{C}$ genau dann, wenn $(\Phi P, \Phi \pi)$ projektive Hülle von ΦM in $\mathcal{D}$ ist.*
(6) *Es ist $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ exakt in $\mathcal{C}$ genau dann, wenn $\Phi X \xrightarrow{\Phi f} \Phi Y \xrightarrow{\Phi g} \Phi Z$ exakt ist in $\mathcal{D}$.*
(7) *Ein Objekt $S \in \mathcal{C}$ ist einfach genau dann, wenn $\Phi(S) \in \mathcal{D}$ einfach ist.*
(8) *Ein Objekt $U \in \mathcal{C}$ ist unzerlegbar genau dann, wenn $\Phi(U) \in \mathcal{D}$ unzerlegbar ist.*

Lemma 6.3.9. *Sei $D: \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ eine Dualität zwischen abelschen Kategorien. Sei $f: X \to X'$ ein Morphismus in $\mathcal{C}$. Dann*

(1) *f is Monomorphismus genau dann, wenn $D(f)$ Epimorphismus ist.*
(2) *f is Epimorphismus genau dann, wenn $D(f)$ Monomorphismus ist.*
(3) *(K, i) ist Kern von f in $\mathcal{C}$ genau dann, wenn (DK, Di) Cokern von $D(f)$ ist.*
(4) *(C, p) ist Cokern von f in $\mathcal{C}$ genau dann, wenn (DC, Dp) Kern von $D(f)$ ist.*
(5) *(P, π) ist projektive Hülle von M in $\mathcal{C}$ genau dann, wenn $(DP, D\pi)$ injektive Hülle von DM in $\mathcal{D}$ ist.*
(6) *Es ist $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ exakt in $\mathcal{C}$ genau dann, wenn $DZ \xrightarrow{Dg} DY \xrightarrow{Df} DX$ exakt ist in $\mathcal{D}$.*
(7) *Ein Objekt $S \in \mathcal{C}$ ist einfach genau dann, wenn $D(S) \in \mathcal{D}$ einfach ist.*
(8) *Ein Objekt $U \in \mathcal{C}$ ist unzerlegbar genau dann, wenn $D(U) \in \mathcal{D}$ unzerlegbar ist.*

6.4. Projektive und Injektive Moduln

Wir haben gesehen, dass die unzerlegbar projektiven A-Moduln bis auf Isomorphie gegeben sind durch $e_1 A, \ldots, e_n A$. Hierbei ist $e_1, \ldots, e_n$ ein System primitiver, orthogonaler Idempotenter mit $e_1 + e_2 + \cdots + e_n = 1$ (vollständig).

Analoge Aussagen hat man auch für Linksmoduln. Anwendung der Dualität macht aus projektiven A-Linksmoduln injektive A-Rechtsmoduln.

Satz 6.4.1. *Sei $e_1, \ldots, e_n$ ein vollständiges System primitiver orthogonaler Idempotenter von A. Dann ist ein jeder unzerlegbaren injektive A-Moduln isomorph zu einem von*

$$D(Ae_1), \ldots, D(Ae_n).$$

Beweis. $Ae_1, \ldots, Ae_n$ enthalten alle projektiven A-Linksmoduln. Die Aussage ist dann klar nach Eigenschaften der Dualität D. $\square$

Folgerung 6.4.2. *Zu jedem $M \in \mathrm{mod}(A)$ gibt es ein $n \geq 0$ und eine Einbettung $M \to D({}_A A)^n$.*

Man nennt daher $D({}_A A)$ einen injektiven Cogenerator von $\mathrm{mod}(A)$. Dual ist A_A ein projektiver Generator von $\mathrm{mod}(A)$.

ÜBUNG 6.4.3. Man beschreibe die unzerlegbar injektiven A-Moduln in Termen von einfachen Moduln und dem Begriff des Sockels.

ÜBUNG 6.4.4. Sei $0 \to X \to Y \to Z \to 0$ ein kurze exakte Folge in $\operatorname{mod}(A)$. Sei $M \in \operatorname{mod}(A)$. Zeige:

(1) Es ist $0 \to \operatorname{Hom}(M, X) \to \operatorname{Hom}(M, Y) \to \operatorname{Hom}(M, Z)$ exakt.
(2) Es ist $0 \to \operatorname{Hom}(Z, M) \to \operatorname{Hom}(Y, M) \to \operatorname{Hom}(X, M)$ exakt.
(3) M ist projektiv genau dann, wenn der Funktor $\operatorname{Hom}(P, -)$ kurze exakte Folgen in kurze exakte Folgen überführt, und genau dann, wenn dies für den kontravarianten Funktor $\operatorname{Hom}(-, P)$ gilt.

6.5. Basische Algebren

Sei $e_1, \ldots, e_n$ ein vollständiges System orthogonaler, primitiver Idempotenter von A. Beachte, dass hierbei für verschiedene i, j die Moduln e_iA, e_jA isomorph sein können. Die Algebra A heisst basisch, falls für $i \neq j$ stets $e_iA \not\simeq e_jA$ gilt. Dies ist äquivalent dazu, dass mit $J = \operatorname{Rad}(A)$ gilt, dass A/J ein Produkt von Divisionsalgebren ist.

LEMMA 6.5.1. *Sei J das Jacobson-Radikal von A.*

(1) $\operatorname{Hom}(e_iA, e_jA) \simeq e_jAe_i$, *$f \mapsto f(e_i)$ ist ein Isomorphismus.*
(2) $e_iAe_i \simeq \operatorname{End}(e_iA)$ *ist ein lokaler Ring mit Radikal e_iJe_i.*
(3) *Ist $e \in A$ idempotent und $M \in \operatorname{mod}(A)$, so gilt* $\operatorname{Hom}_A(eA, M) \simeq Me$.

BEWEIS. Zu (3): $f \mapsto f(e) = f(e)e$ und $xe \mapsto f$ mit $f(e) = x$ sind zueinander invers. □

SATZ 6.5.2. *Sei e Summe von Idempotenten aus $e_1, \ldots, e_n$, wobei aus jeder Isomorphieklasse* genau ein *Idempotenter genommen wird. Sei $P = eA$. Dann gilt:*

(1) *Die Algebra $B = \operatorname{End}_A(P) \simeq eAe$ ist basisch.*
(2) $\operatorname{Hom}_A(P, -)\colon \operatorname{mod}(A) \simeq \operatorname{mod}(B)$ *ist eine Äquivalenz.*

Wir zeigen den Satz mit Hilfe einer allgemeineren Konstruktion. Sei $P \in \operatorname{mod}(A)$ beliebig. Sei $B = \operatorname{End}_A(P)$. Definiere den "Evaluationsfunktor"

$$e_P = \operatorname{Hom}_A(P, -)\colon \operatorname{mod}(A) \to \operatorname{mod}(B).$$

Setze noch:

$$\operatorname{add}(P) = \{X \in \operatorname{mod}(A) \mid X \text{ ist direkter Summand von einem } P^n\}$$

und

$$\operatorname{mod}(P) = \{X \in \operatorname{mod}(A) \mid \exists\, P^1 \to P^0 \to X \to 0 \text{ exakt},\ P^0,\ P^1 \in \operatorname{add}(P)\}.$$

LEMMA 6.5.3 (Projektivizierung). *Sei $P \in \operatorname{mod}(A)$, sei $B = \operatorname{End}_A(P)$.*

(a) *Für $X \in \operatorname{mod}(A)$ und $Z \in \operatorname{add}(P)$ definiert e_P eine Isomorphie*

$$\operatorname{Hom}_A(Z, X) \xrightarrow{\sim} \operatorname{Hom}_B(e_P(Z), e_P(X)).$$

(b) *Ist $X \in \operatorname{add}(P)$, so gilt $e_P(X) \in \operatorname{proj}(B)$.*
(c) *Es ist $e_P\colon \operatorname{add}(P) \to \operatorname{proj}(B)$ eine Äquivalenz.*
(d) *Sei P projektiv. Dann ist $e_P\colon \operatorname{mod}(P) \to \operatorname{mod}(B)$ eine Äquivalenz.*

Beweis von Satz 6.5.2: Sei $P = P_1 \oplus \cdots \oplus P_s$, wobei $P_1, \ldots, P_s$ ein Repräsentantensystem für die unzerlegbaren projektiven A-Moduln sind, $P = eA$ mit $e = e_1 + \cdots + e_s$. (Bis auf Nummerierung; $s \leq n$.) Dann gilt $A \in \operatorname{add}(P)$, und es folgt $\operatorname{add}(P) = \operatorname{proj}(A)$ und $\operatorname{mod}(P) = \operatorname{mod}(A)$. Damit ist also

$$e_P\colon \operatorname{mod}(A) \to \operatorname{mod}(B)$$

eine Äquivalenz von K-Kategorien. Es gilt $ee_i = e_i = e_ie$ für $1 \leq i \leq s$ und $ee_j = 0 = e_je$ für $s + 1 \leq j \leq n$. Es ist $e = e_1 + \cdots + e_s$ das Einselement von eAe. In diesem Ring sind $e_i = ee_ie$ $(i = 1, \ldots, s)$ ein vollständiges System orthogonaler Idempotenter. Da $\mathrm{End}_B(e_P(P_i)) \simeq \mathrm{End}_A(P_i)$ (da e_P voll-treu), und

$$e_P(P_i) = \mathrm{Hom}_A(P, P_i) = \mathrm{Hom}_A(eA, P_i) = P_ie = e_iAe,$$

sind diese Idempotenten auch primitiv. Wegen

$$\mathrm{Hom}_B(e_P(P_i), e_P(P_j)) \simeq \mathrm{Hom}_A(P_i, P_j)$$

gilt $e_P(P_i) \not\simeq e_P(P_j)$ für $1 \leq i, j \leq s$ mit $i \neq j$.

KAPITEL 7

Wegealgebren und Darstellungen von Köchern

7.1. Köcher

Definition 7.1.1. Ein *Köcher* ist ein gerichteter Graph. D. h. jede Kante ist mit einer Orientierung/Richtung versehen, die durch eine “Pfeilspitze” kenntlich gemacht wird. Man nennt die Kanten in einem Köcher daher *Pfeile*. Formal ist ein Köcher $\Gamma = (V, E, \alpha, \omega)$, wobei (V, E) ein Graph ist (der *unterliegende* Graph, bezeichnet mit $|\Gamma|$) und α, $\omega : E \longrightarrow V$ Abbildungen, wobei $\alpha(a)$ den Anfang und $\omega(a)$ das Ende (Pfeilspitze) eines Pfeiles bezeichnet: Für $i \xrightarrow{a} j$ ist $\alpha(a) = i$ und $\omega(a) = j$. Wir schreiben auch $a = (i, j) = (\alpha(a), \omega(a))$.

Man beachte, dass ein Graph auf verschiedene Arten orientiert werden kann, so dass also verschiedene Köcher denselben unterliegenden Graphen haben können.

7.1.2 (Wege, Zykel). Ein (orientierter) *Weg* in einem Köcher Γ ist eine Folge von Pfeilen $a_1, \dots, a_s$ in Γ, so dass $\omega(a_i) = \alpha(a_{i+1})$ gilt für alle $i = 1, \dots, s-1$. Gilt zusätzlich $\omega(a_s) = \alpha(a_1)$, so handelt es sich um einen (orientierten) *Kreis* oder *Zykel*. Wir nennen Γ *zykelfrei* (oder: *ohne orientierte Kreise*, falls Γ keine (orientierten) Kreise enthält. Falls hingegen der unterliegende Graph $|\Gamma|$ keine Zykel enthält, nennen wir Γ *azyklisch*.

7.2. Darstellungen von Köchern

Im folgenden sei K stets ein Körper.

Definition 7.2.1 (Darstellungen). Sei $\Gamma = (I, E, \alpha, \omega)$ ein Köcher. Eine (endlichdimensionale) K-lineare Darstellung von Γ ist ein Tupel

$$V = (V(i), V(a))_{i \in I,\, a \in E},$$

wobei

- für jedes $i \in I$ ist $V(i)$ ein endlichdimensionaler K-Vektorraum;
- für jedes $a = (i, j) \in E$ ist $V(a)\colon V(i) \longrightarrow V(j)$ eine K-lineare Abbildung.

Beispiel 7.2.2. (1) Sei Γ der Köcher $\overset{1}{\circ} \longrightarrow \overset{2}{\circ}$. Eine Darstellung von Γ ist nicht anderes als ein Paar von endlichdimensionalen K-Vektorräumen und einem Homomorphismus zwischen diesen.

(2) Sei Γ der Köcher bestehend aus einem Punkt mit einer Schlaufe. Eine Darstellung von Γ ist nicht anderes als ein endlichdimensionaler K-Vektorraum zusammen mit einem Endomorphismus.

7.2.3 (Dimensionsvektor). Sei $V = (V(i), V(a))$ eine K-lineare Darstellung des Köcher Γ. Das Tupel

$$\underline{\dim}(V) = (\dim_K V(1), \dots, \dim_K V(n)) \in \mathbb{Z}^n$$

heißt der *Dimensionsvektor* von V. Dies ist eine wichtige Invariante der Darstellung V.

Definition 7.2.4 (Morphismen). $\Gamma = (I, E, \alpha, \omega)$ ein Köcher. Seien $V = (V(i), V(a))$ und $W = (W(i), W(a))$ zwei K-lineare Darstellungen. Ein *Morphismus* von $f\colon V \longrightarrow W$

(nur Schreibweise!) ist ein Tupel $(f(i))_{i\in I}$ mit K-linearen Abbildungen $f(i)\colon V(i) \longrightarrow W(i)$, so dass für jeden Pfeil $a = (i,j) \in E$ das folgende Diagramm kommutiert

$$\begin{tikzcd} V(i) \arrow[r, "f(i)"] \arrow[d, "V(a)"'] & W(i) \arrow[d, "W(a)"] \\ V(j) \arrow[r, "f(j)"] & W(j), \end{tikzcd}$$

also $W(a) \circ f(i) = f(j) \circ V(a)$ gilt.

Komposition zweier Morphismen $f = (f(i))_{i\in I}\colon V \longrightarrow W$ und $g = (g(i))_{i\in I}\colon W \longrightarrow U$ ist definiert als $gf = (g(i) \circ f(i))_{i\in I}\colon V \longrightarrow U$, und dies ist offenbar wieder ein Morphismus von Darstellungen.

Ein Morphismus $f = (f(i))\colon V \longrightarrow W$ heißt *Isomorphismus*, falls $f(i)$ für alle $i \in I$ Isomorphismen sind. Ein Morphismus $f = (f(i))\colon V \longrightarrow W$ heißt *Monomorphismus* (bzw. *Epimorphismus*), falls jedes $f(i)$ injektiv (bzw. surjektiv) ist. Falls $V = W$ gilt, heißt f auch *Endomorphismus*, und falls f zusätzlich Isomorphismus ist, so heißt f *Automorphismus*. Gibt es zwischen zwei Darstellungen V und W einen Isomorphismus, so heißen V und W *isomorph*, und wir schreiben $V \simeq W$.

Zwischen zwei Darstellungen gibt es immer den Nullmorphismus, und jede Darstellung V hat als Endomorphismus den identischen Morphismus $1_V = (1_{V(i)})_{i\in I}$.

Die Menge aller Morphismen von $f\colon V \longrightarrow W$ bezeichnen wir mit $\mathrm{Hom}(V,W)$. Im Fall $V = W$ schreiben wir $\mathrm{End}(V) = \mathrm{Hom}(V,V)$. Da man in offensichtlicher Weise die Summe $f+g$ von Morphismen $f,\, g\colon V \longrightarrow W$ erklären kann, ist $\mathrm{Hom}(V,W)$ ein K-Vektorraum und $\mathrm{End}(V)$ eine K-Algebra (ein Ring).

Die Kategorie aller endlichdimensionalen K-linearen Darstellungen von Γ bezeichen wir mit $\mathcal{L}_K(\Gamma)$. Dies ist eine K-Kategorie. Häufig unterdrücken wir das Wörter “K-linear” und “endlichdimensional” und sprechen nur von Darstellungen.

Übung 7.2.5. Ein Morphismus $f\colon V \longrightarrow W$ ist ein Isomorphismus genau dann, wenn es einen Morphismus $g\colon W \longrightarrow V$ gibt mit $gf = 1_V$ und $fg = 1_W$.

7.2.6 (Unter-/Faktordarstellungen). Sei $V = (V(i), V(a))$ eine Darstellung. Eine Darstellung $U = (U(i), U(a))$ heißt *Unterdarstellung* von V, falls $U(i) \subseteq V(i)$ Unterräume sind für alle $i \in I$, und falls die Inklusionen $U(i) \xrightarrow{\subseteq} V(i)$ einen Morphismus von Darstellungen definiere, falls also $V(a)(x) = U(a)(x)$ für alle $x \in U(i)$ und für alle Pfeile $a = (i,j)$ gilt.

Ist U eine Unterdarstellung von V, so ist die Faktordarstellung V/U definiert als Faktorvektorraum $(V/U)(i) = V(i)/U(i)$ für jedes $i \in I$, und für alle Pfeile $a = (i,j)$ die K-lineare Abbildung $(V/U)(a)$ definiert wird durch $(V/U)(a)(x+U(i)) \stackrel{def}{=} V(a)(x) + U(j)$. Dies ist wohldefiniert: Denn ist $x \in U(i)$, so ist $V(a)(x) = U(a)(x) \in U(j)$. Nach Konstruktion liefert dies eine Darstellung.

Offenbar gilt: Ist U eine Unterdarstellung von V, so ist $\underline{\dim}(U) \leq \underline{\dim}(V)$ und $\underline{\dim}(V/U) \leq \underline{\dim}(V)$.

7.2.7 (Kern/Bild/Cokern). Der Kern: Sei $f\colon V \longrightarrow W$ ein Morphismus. Definiere $\mathrm{Kern}(f) = U = (U(i), U(a))$, wobei $U(i) = \mathrm{Kern}(f(i))$, und für jeden Pfeil $a = (i,j)$ sei $U(a)$ die eindeutig bestimmte K-lineare Abbildung $U(i) \longrightarrow U(j)$, so dass das linke Quadrat im folgenden Diagramm kommutiert

$$\begin{tikzcd} U(i) \arrow[r, "\subseteq"] \arrow[d, "U(a)"'] & V(i) \arrow[r, "f(i)"] \arrow[d, "V(a)"'] & W(i) \arrow[d, "W(a)"] \\ U(j) \arrow[r, "\subseteq"] & V(j) \arrow[r, "f(j)"] & W(j). \end{tikzcd}$$

Für $x \in U(i) = \operatorname{Kern} f(i)$ definiere $U(a)(x) = V(a)(x)$. Dann gilt

$$f(j)(U(a)(x)) = f(j)(V(a)(x)) = W(a)(f(i)(x)) = W(a)(0) = 0,$$

also liegt das Bild von $U(a)$ in $U(j)$. Das linke Quadrat kommutiert offenbar, und umgekehrt zeigt die Kommutativität, dass man $U(a)$ wie oben definieren muss.

Das Bild: Wird analog definiert. (ÜBUNG!)

Der Cokern: Dieser ist definiert als die Faktordarstellung $\operatorname{Cokern}(V) = W/\operatorname{Bild}(f)$.

7.2.8 (Exakte Folgen). Eine Folge

$$U \xrightarrow{f} V \xrightarrow{g} W$$

von Morphismen von Darstellungen heisst exakt, falls $\operatorname{Bild}(f) = \operatorname{Kern}(g)$ gilt. Dies ist äquivalent dazu, dass für alle $i \in I$ die Folgen

$$U(i) \xrightarrow{f(i)} V(i) \xrightarrow{g(i)} W(i)$$

K-linear Abbildungen exakt sind.

7.2.9 (Einfache Darstellungen). Eine Darstellung V eines Köchers heißt *einfach*, falls $V \neq 0$ und für jede Unterdarstellung $U \subseteq V$ gilt, dass $U = 0$ oder $U = V$ ist.

ÜBUNG 7.2.10. Sei $V \neq 0$ eine Darstellung eines Köchers. Folgende Aussagen sind äquivalent:

(1) V ist einfach.
(2) Jede Faktordarstellung von V ist 0 oder gleich V.
(3) Ist $f\colon U \longrightarrow V$ ein Monomorphismus, so gilt $U = 0$ oder f ist ein Isomorphismus.
(4) Ist $g\colon V \longrightarrow W$ ein Epimorphismus, so gilt $W = 0$ oder g ist ein Isomorphismus.

ÜBUNG 7.2.11. (1) Sei $\Gamma = (I, E, \alpha, \omega)$ ein Köcher. Für jedes $i \in I = \{1, \dots, n\}$ definiere eine Darstellung S_i durch

$$S_i(j) = \begin{cases} K & j = i, \\ 0 & j \neq i. \end{cases}$$

und $V(a) = 0$ für alle Pfeile $a \in E$. Dann ist S_i eine einfache Darstellung. Für $i \neq j$ gilt $S_i \not\simeq S_j$.

(2) Sei Γ ohne orientierte Kreise und $V \neq 0$ eine Darstellung. Es gibt ein $i \in I$ und einen Monomorphismus $S_i \longrightarrow V$. Es gibt ein $j \in I$ und einen Epimorphismus $V \longrightarrow S_j$.

PROPOSITION 7.2.12. *Sei Γ ohne orientierte Kreise. Jede einfache Darstellung ist isomorph zu einem S_i (für ein $i \in I$).*

BEWEIS. Ist V einfach, so gibt es (wegen $V \neq 0$) nach vorstehender Übung ein i und einen Monomorphismus $S_i \longrightarrow V$, der aber wegen der Einfachheit von V auch ein Epimorphismus sein muss. □

ÜBUNG 7.2.13. Sei Γ der Köcher $\widetilde{\mathbb{A}}_0$ (ein Punkt 1 mit einer Schlaufe a). Für jedes $\alpha \in K$ sei S_α die Darstellung mit $S_\alpha(1) = K$ und $S_\alpha(a)\colon K \longrightarrow K$ die lineare Abbildung mit $S_\alpha(a)(x) = \alpha x$. Man zeige, dass alle S_α einfache Darstellungen sind mit $S_\alpha \not\simeq S_\beta$ für alle $\alpha \neq \beta$.

7.2.14 (Direkte Summe). Sei $V = (V(i), (V(a))$ eine Darstellung. V ist *direkte Summe* von zwei Unterdarstellungen $U_1 = (U_1(i), U_1(a))$ und $U_2 = (U_2(i), U_2(a))$, und man schreibt $V = U_1 \oplus U_2$, falls

(1) für jedes $i \in I$ ist der Vektorraum $V(i) = U_1(i) \oplus U_2(i)$ direkte Summe der Unterräume $U_1(i)$ und $U_2(i)$;
(2) für jeden Pfeil a ist die lineare Abbildung $V(a) = U_1(a) \oplus U_2(a)$ direkte Summe der linearen Abbildungen $U_1(a)$ und $U_2(a)$.

Dabei ist die direkte Summe zweier linearer Abbildung wie folgt erklärt: Seien V, V' Vektorräume und $V = U_1 \oplus U_2$ sowie $V' = U_1' \oplus U_2'$ direkte Summen von Unterräumen. Seien $f_1 \colon U_1 \longrightarrow U_1'$ und $f_2 \colon U_2 \longrightarrow U_2'$ lineare Abbildungen. Dann ist $f_1 \oplus f_2 \colon V \longrightarrow V'$ definiert durch $(f_1 \oplus f_2)(u_1 + u_2) = f_1(u_1) + f_2(u_2)$ für alle $u_1 \in U_1$, $u_2 \in U_2$.

Sind B_i bzw. B_i' Basen von U_i bzw. U_i' $(i = 1, 2)$, so sind $B = (B_1, B_2)$ bzw. $B' = (B_1', B_2')$ Basen von V bzw. V', und bzgl. solcher Basen wird die lineare Abbildung $f_1 \oplus f_2 \colon V \longrightarrow V'$ dargestellt durch die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix},$$

wobei A_i die Darstellungsmatrix von f_i bzgl. der entsprechenden Basen ist $(i = 1, 2)$.

Man kann die direkte Summe nicht nur für Unterdarstellungen einer Darstellunge definieren, sondern allgemeiner: Sind $V = (V(i), V(a))$ und $W = (W(i), W(a))$ Darstellungen, so definiert man

$$V \oplus W \stackrel{def}{=} (V(i) \oplus W(i), V(a) \oplus W(a)).$$

7.2.15 (Unzerlegbarkeit). Eine Darstellung V heißt *unzerlegbar*, falls $V \neq 0$ ist, und falls aus einer Zerlegung $V = U_1 \oplus U_2$ in eine direkte Summe von Unterräumen stets folgt, dass $U_1 = 0$ oder $U_2 = 0$ gilt.

Offenbar ist jede einfache Darstellung insbesondere unzerlegbar. Die Umkehrung gilt im allgemeinen nicht.

Die beiden folgenden Aussagen zeigt mir genau wie für endlichdimensionale Moduln; wir werden später aber noch einen alternativen Beweis dafür via einer Äquivalenz von Kategorien sehen.

Proposition 7.2.16. *Sei V eine Darstellung. Dann sind äquivalent:*

(1) *V ist unzerlegbar.*
(2) $\mathrm{End}(V)$ *hat genau die beiden Idempotenten* 0 *und* 1.
(3) $\mathrm{End}(V)$ *ist lokal.*

Satz 7.2.17 (Krull-Remak-Schmidt). *Jede K-lineare Darstellung V eines Köchers Γ besitzt eine direkte Zerlegung*

$$V = V_1 \oplus \ldots \oplus V_s$$

in unzerlegbare Unterdarstellungen V_i. Jede solche Zerlegung ist bis auf Isomorphie und Reihenfolge der Summanden eindeutig.

7.2.18 (Endlicher Darstellungstyp). Ein Köcher Γ heißt von *endlichem Darstellungstyp* (über dem Körper K), falls es bis auf Isomorphie nur endlich viele unzerlegbare Darstellungen gibt.

7.2.19 (Normalformen). Isomorphie von Darstellungen (oder anderen “Objekten”) ist eine Äquivalenzrelation. Man möchte Objekte bis auf Isomorphie klassifizieren. Eine Äquivalenzrelation liefert eine Einteilung in die Äquivalenzklassen. Grob gesprochen ist eine Normalform eines Objektes ein Repräsentant derselben Äquivalenzklasse, welcher sich relativ leicht und prägnant beschreiben lässt und welcher einem Objekt eindeutig zugeordnet werden kann.

In der Linearen Algebra studiert man solche Normalformen in gewissen Fällen. Etwa die Klassifikation von $m \times n$-Matrizen bis auf Äquivalenz. Oder die Klassifikation der quadratischen Matrizen (Endomorphismen) bis auf Ähnlichkeit, welche auf die Jordansche Normalform führt (über algebraisch abgeschlossenem Körper K). Oder die Normalformen orthogonaler, symmetrischer oder unitärer Abbildungen, etc.

Wir gehen nun auf die erstgenannten Probleme näher ein.

Beispiel 7.2.20. Sei $f\colon K^n \longrightarrow K^m$ eine lineare Abbildung. Dies ist gerade eine Darstellung des Köchers $\Gamma\colon \overset{1}{\circ}\!\longrightarrow\!\overset{2}{\circ}$. Wir fixieren auf K^n und K^m Basen, etwa die Standardbasen, so dass f durch eine Matrix $A \in \mathrm{M}_{m,n}(K)$ gegeben ist. Zwei solche Matrizen A und B heißen äquivalent, falls es Matrizen $P \in \mathrm{GL}_m(K)$ und $Q \in \mathrm{GL}_n(K)$ gibt mit $B = PAQ$. Anders ausgedrückt, lineare Abbildungen $f, g\colon K^n \longrightarrow K^m$ heißen äquivalent, falls es Isomorphismen $\varphi\colon K^n \longrightarrow K^n$ und $\psi\colon K^m \longrightarrow K^m$ gibt mit $g = \psi f \varphi^{-1}$, bzw. $g\varphi = \psi f$. Dies bedeutet gerade, dass $K^n \xrightarrow{f} K^m$ und $K^n \xrightarrow{g} K^m$ isomorphe Darstellungen von Γ liefern. In der Lineare Algebra I wird eine Normalform für f bzw. angegeben: A ist äquivalent zu der Matrix

$$R = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & 1 & \\ & & & & \\ & & & & \end{pmatrix},$$

wobei $r = \mathrm{Rang}(A)$ viele Einsen auftreten und sonst nur Nullen. Wäre $m = n$, so wäre offenbar $R = (1) \oplus (1) \oplus \ldots \oplus (1) \oplus (0) \oplus \ldots (0)$ (r-mal 1), bzw. wäre die Darstellung $K^n \xrightarrow{f} K^m$ isomorph zu einer direkten Summe von Darstellungen der Form

$$\mathbf{1} = (K \xrightarrow{1} K)\ (r\text{-mal}) \text{ und } (K \xrightarrow{0} K) = (K \xrightarrow{0} 0) \oplus (0 \xrightarrow{0} K).$$

Es ist $\mathbf{1}$ eine unzerlegbare Darstellung von Γ, denn es ist offenbar $\mathrm{End}(\mathbf{1}) = K$. Im Fall $m \neq n$ treten in der direkten Summe die Summanden der Form $0 \xrightarrow{0} K$ und $K \xrightarrow{0} 0$ mit ungleicher Vielfachheit auf. Dies sind einfache Darstellungen, also unzerlegbare Darstellungen.

Zusammengefasst:

Proposition 7.2.21. *Die unzerlegbaren Darstellungen des Köchers* $\Gamma\colon \overset{1}{\circ}\!\longrightarrow\!\overset{2}{\circ}$ *sind (bis auf Isomorphie) gegeben durch die drei Darstellungen*

$$K \xrightarrow{1} K,\ 0 \xrightarrow{0} K,\ K \xrightarrow{0} 0.$$

Insbesondere ist Γ *von endlichem Darstellungstyp.*

Bemerkung 7.2.22. (1) Die Dimensionsvektoren der obigen drei unzerlegbaren Darstellungen sind $(1,1)$, $(0,1)$ und $(1,0)$. Dies sind gerade die positiven Wurzeln des Graphen $|\Gamma| = \mathbb{A}_2$.

(2) Für den noch einfacheren Fall $\Gamma = \mathbb{A}_1$ ist die einzige unzerlegbare Darstellung K.

Beispiel 7.2.23. Sei nun Γ der Einschlaufenköcher. Eine Darstellung dieses Köchers ist gerade ein Endomorphismus eines endlichdimensionalen Vektorraums. Isomorphie von Darstellungen bedeutet gerade Ähnlichkeit von Endomorphismen bzw. quadratischen Matrizen. Wir nehmen nun an, dass der Körper K algebraisch abgeschlossen ist, etwa $K = \mathbb{C}$. In der Linearen Algebra II wird gezeigt, dass der Satz von der Jordanschen Normalform gilt: Jede quadratische Matrix ist ähnlich zu einer direkten Summe von Jordankästchen der Form

$$J_n(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & & \\ & \lambda & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \lambda & 1 \\ & & & & \lambda \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_n(K).$$

(Einsen ununterbrochen auf der Nebendiagonalen.)

Behauptung: *Die Darstellungen* $(K^n, J_n(\lambda))$ *sind unzerlegbar und paarweise nicht-isomorph* $(n \geq 1,\ \lambda \in K.)$

Eine direkte Zerlegung von $(V, f) = (K^n, J_n(\lambda))$ ist eine direkte Zerlegung des Vektorraums $V = U_1 \oplus U_2$ in Unterräume U_1 und U_2, die f-invariant sind, d. h. $f(U_1) \subseteq U_1$ und $f(U_2) \subseteq U_2$. Ist $g = f - \lambda \cdot 1_V$, so sind U_1 und U_2 auch g-invariant, und g ist nilpotent mit Nilpotenzindex genau n (was man der Matrix $J_n(0)$ ansieht). Die Einschränkungen von g auf U_1 und U_2 sind ebenfalls nilpotent. Wären dies Matrizen kleineren Formats, so würde dies einen kleineren Nilpotenzindex liefern.

Vergleich der Dimensionen bzw. der Eigenwerte liefert die Nicht-Isomorphie. (Der Beweis gilt offenbar über jedem Körper K.)

Proposition 7.2.24. *Sei K ein algebraisch abgeschlossener Körper. Die unzerlegbaren Darstellungen des Einschlaufenköchers sind (bis auf Isomorphie) gegeben durch die Darstellungen*

$$(K^n, J_n(\lambda)) \qquad (n \geq 1,\ \lambda \in K),$$

und diese sind paarweise nicht-isomorph. Insbesondere ist der Einschlaufenköcher nicht von endlichem Darstellungstyp über K.

Bemerkung 7.2.25. Obige Darstellungen sind auch unzerlegbare Darstellungen des Einschlaufenköchers über einem beliebigen Körper K. Jedoch gibt es über nicht-algebraisch abgeschlossenem Körper weitere unzerlegbare Darstellungen.

Bemerkung 7.2.26. Man mache sich umgekehrt klar, dass obige Klassifikationen der unzerlegbaren Darstellungen die beiden beschriebenen Normalformenprobleme aus der Linearen Algebra lösen.

Übung 7.2.27. Sei Γ der Einschlaufenköcher mit Punkt 1 und Schlaufe a. Sei $K = \mathbb{R}$ der Körper der reellen Zahlen. Man zeige, dass folgendes V eine einfache Darstellung ist, wobei $V(1) = \mathbb{R}^2$ und $V(a)$ gegeben ist durch die Matrix $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Man zeige $\operatorname{End}(V) \simeq \mathbb{C}$.

Theorem 7.2.28 (Gabriel). *Sei K ein Körper und Γ ein zusammenhängender Köcher und $|\Gamma|$ der unterliegende Graph. Dann sind äquivalent:*

(1) Γ *ist von endlichem Darstellungstyp.*
(2) $|\Gamma|$ *ist ein Dynkin-Graph* $\mathbb{A}_n$ $(n \geq 1)$, $\mathbb{D}_n$ $(n \geq 4)$ *oder* $\mathbb{E}_6$, $\mathbb{E}_7$, $\mathbb{E}_8$.

7.3. Darstellungen und Moduln

Sei weiterhin K stets ein Körper.

7.3.1 (Die Wegealgebra eines Köchers). Sei Γ ein Köcher mit Punktmenge $I = \{1, \ldots, n\}$ und Pfeilmenge E. Definiere eine K-Algebra A wie folgt: Als K-Vektorraum wird A frei erzeugt von allen (gerichteten) Wegen in Γ. Dabei gibt es formal auch Wege ε_i der Länge 0 zu jedem Punkt $i \in I$. Die Wege der Länge 1 sind gerade die Pfeile in E. Dieser K-Vektorraum ist offenbar genau dann endlichdimensional, wenn es nur endlich viele Wege in Γ gibt, und dies gilt genau dann, wenn Γ keine orientierten Kreise enthält. Elemente in A sind also formale Summen

$$\sum_{w \text{ Weg}} \alpha_w \cdot w,$$

wobei $\alpha_w \in K$ fast alle $= 0$ sind; in der obigen Summe sind die Koeffizienten α_w eindeutig bestimmt. Addition und Multiplikation mit Skalaren geschieht "komponentenweise".

Es wird nun eine Multiplikation auf A definiert. Für jeden Weg w sei (ähnlich wie für Pfeile) $\alpha(w)$ der Punkt, in dem w beginnt, und $\omega(w)$ der Punkt, in dem w endet. Seien w_1 und w_2 zwei Wege in Γ. Falls $\alpha(w_2) = \omega(w_1)$ gilt, so kann man w_2 und w_1 *konkatenieren*,

d. h. den zusammengesetzten Weg $w_1 * w_2$ mit $\alpha(w_1 * w_2) = \alpha(w_1)$ und $\omega(w_1 * w_2) = \omega(w_2)$ bilden. Definiere

$$w_1 w_2 = w_1 \cdot w_2 \overset{def}{=} \begin{cases} w_1 * w_2 & \alpha(w_2) = \omega(w_1), \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Diese Multiplikation zwischen Wegen (also auf den obigen Basiselementen von A) wird bilinear auf ganz A fortgesetzt. Offenbar ist sie assoziativ und es gelten die Distributivgesetze. Es gilt:

(1) $\varepsilon_i w = \delta_{i,\alpha(w)} \cdot w$;
(2) $w \varepsilon_j = \delta_{j,\omega(w)} \cdot w$;
(3) $\varepsilon_i \varepsilon_j = \delta_{ij} \varepsilon_i$ (d. h. $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$ bilden “orthogonale Idempotente”).

Setzt man $1 \overset{def}{=} \varepsilon_1 + \cdots + \varepsilon_n \in A$, so folgt $1 \cdot w = w = w \cdot 1$ für jeden Weg w. Es ist also 1 das Einselement in A. Damit ist A ein (in der Regel nichtkommutativer) Ring mit Einselement. Weil A auch ein K-Vektorraum ist, so dass die Beziehung

$$\alpha(ab) = (\alpha a)b = a(\alpha b)$$

für alle $\alpha \in K$ und alle a, $b \in A$ gilt, ist dies eine K-Algebra.

Bezeichnung: A heißt die *Wegealgebra* von Γ über K, und man schreibt $A = K\Gamma$.

In der Darstellungstheorie von Algebren werden die Moduln über einer Algebra untersucht.

7.3.2 (Moduln und Homomorphismen). Sei A eine K-Algebra. Ein K-Vektorraum M heißt ein A-*Modul* (genauer: Rechtsmodul), falls es eine Abbildung $M \times A \longrightarrow M$, $(m, a) \mapsto m \cdot a = ma$ gibt mit folgenden Eigenschaften:

$$m(a + a') = ma + ma',\ (m + m')a = ma + m'a,\ m(aa') = (ma)a',\ m1 = m$$

für alle m, $m' \in M$ und alle a, $a' \in A$.

Ein *Homomorphismus* $f\colon M \longrightarrow N$ zwischen A-Moduln M und N ist eine A-lineare Abbildung, d. h. es gilt $f(ma) = f(m)a$ für alle $a \in A$ und alle $m \in M$. Die Menge $\mathrm{Hom}_A(M, N)$ aller A-linearen Abbildungen von M nach N bildet einen K-Vektorraum. *Kerne*, *Bilder* und *Cokerne* von Modulhomomorphismen sind wie für lineare Abbildungen zwischen Vektorräumen oder Morphismen zwischen K-linearen Darstellungen definiert. Ähnliches gilt für *Untermoduln*, *direkte Summen*, *einfache Moduln*, *unzerlegbare Moduln*, etc.

Ähnlich wie $\mathcal{L}_K(\Gamma)$ bilden die *endlichdimensionalen* (sic!) A-Moduln zusammen mit den Homomorphismen eine *Kategorie* $\mathrm{mod}(A)$. (Aufgrund obiger aufgezählter Eigenschaften eine *abelsche* K-Kategorie.) (Häufig wird mit $\mathrm{mod}(A)$ die Kategorie der endlich erzeugten Moduln bezeichnet.)

Der nächste Satz besagt, dass das Studium der (endlichdimensionalen) Darstellungen von Γ gleichwertig ist zum Studium der (endlichdimensionalen) Moduln über der Wegealgebra $K\Gamma$.

Satz 7.3.3. *Sei* Γ *ein Köcher und* $A = K\Gamma$ *die Wegealgebra. Dann sind die* K*-Kategorien* $\mathrm{mod}(A)$ *und* $\mathcal{L}_K(\Gamma)$ *äquivalent.*

Beweis. Wir erklären, was dies bedeutet. Wir konstruieren Funktoren

$$\Phi\colon \mathrm{mod}(A) \longrightarrow \mathcal{L}_K(\Gamma)$$

und

$$\Psi\colon \mathcal{L}_K(\Gamma) \longrightarrow \mathrm{mod}(A)$$

die zueinander invers sind in folgendem Sinn: Für jeden endlichdimensionalen A-Modul M und für jede Darstellung V gibt es Isomorphismen $\Psi\Phi(M) \simeq M$ und $\Phi\Psi(V) \simeq V$, die in gewisser Weise *natürlich* sind (vgl. Beweispunkt (4)).

(1) Sei M ein endlichdimensionaler A-Modul. Definiere eine Darstellung $\Phi(M) = V = (V(i), V(a))$ wie folgt:

Sei $V(i)$ der K-Vektorraum $M\varepsilon_i$ für alle $i \in I$. Für jeden Pfeil $a\colon i \to j \in E$ definiere $V(a)\colon M\varepsilon_i \longrightarrow M\varepsilon_j$ durch $V(a)(m\varepsilon_i) \stackrel{def}{=} m\varepsilon_i a = ma\varepsilon_j$. Dies ist eine K-lineare Abbildung.

Sei nun $f\colon M \longrightarrow M'$ ein Homomorphismus von A-Moduln. Für alle $m \in M$ gilt $f(m\varepsilon_i) = f(m)\varepsilon_i$, also gilt $f(M\varepsilon_i) \subseteq M'\varepsilon_i$. Daher ergibt die Einschränkung von f eine lineare Abbildung $f(i)\colon V(i) \longrightarrow V'(i)$, und $\Phi(f) \stackrel{def}{=} (f(i))_{i\in I}$ liefert einen Morphismus $\Phi(f)\colon \Phi(M) \longrightarrow \Phi(M')$, denn für jeden Pfeil $a\colon i \to j$ gilt

$$\begin{aligned} (f(j) \circ V(a))(m\varepsilon_i) &= f(j)(ma\varepsilon_j) = f(ma\varepsilon_j) = f(m)a\varepsilon_j \\ &= V'(a)(f(m)\varepsilon_i) = (V'(a) \circ f(i))(m\varepsilon_i), \end{aligned}$$

also $f(j) \circ V(a) = V'(a) \circ f(i)$. Es ist leicht nachzurechnen, dass damit Φ einen K-linearen Funktor definiert.

(2) Sei $V = (V(i), V(a))$ eine (endlichdimensionale) Darstellung. Setze $\Psi(V) = M = \bigoplus_{i\in I} V(i)$. Definiere eine A-Modulstrukur auf M: Sei $m = (m_i)_{i\in I} \in M$. Sei w ein Weg in Γ. Ist $w = \varepsilon_i$, so sei $mw = m\varepsilon_i = m_i$. Sei $w = a_1 \dots a_s$ ein Weg von i nach j, Konkatenation von Pfeilen a_k. Sei $V(w) \stackrel{def}{=} V(a_s) \circ \dots \circ V(a_1)$. Definiere mw komponentenweise durch $(mw)_k = \delta_{kj} V(w)(m_i)$. Die einzige nicht-triviale Komponente von mw ist also die j-te, gegeben durch $(mw)_j = V(w)(m_i)$. Diese Aktion von Wegen wird fortgesetzt zu einer Aktion von $A = K\Gamma$ auf M, und M wird damit zu einem A-Modul.

Sei $f = (f(i))_{i\in I}$ ein Morphismus zwischen Darstellungen $V = (V(i), V(a))$ und $V' = (V'(i), V'(a))$. Definiere $\Psi(f) = \oplus_i f(i)\colon M = \bigoplus_{i\in I} V(i)) \longrightarrow \bigoplus_{i\in I} V'(i) = M'$. Dies ist ein Homomorphismus von A-Moduln. Es genügt zu zeigen, dass für einen Weg w und $m \in M$ gilt $\Psi(f)(mw) = \Psi(f)(m)w$. Ist w wie oben, so gilt

$$\begin{aligned} \Psi(f)(mw) &= \oplus_k f(k)(V(w)(m_i)) = f(j)(V(w)(m_i)) \\ &= f(j)(V(w)(m_i)) = V'(w)f(i)(m_i) = f(i)(m_i)w \\ &= \Psi(f)(m)w. \end{aligned}$$

(3) Sei M ein endlichdimensionaler A-Modul. Dann gilt

$$\Psi\Phi(M) = \bigoplus_{i\in I} M\varepsilon_i \simeq M$$

wegen $\varepsilon_1 + \dots + \varepsilon_n = 1$. Man überprüft leicht, dass dies eine Isomorphie von A-Moduln ist. (Sogar Gleichheit.)

Ist umgekehrt $V = (V(i), V(a))$ eine Darstellung, so ist $\Phi\Psi(V) = (W(i), (W(a))$, wobei $W(k) = \big(\bigoplus_{i\in I} V(i)\big)\varepsilon_k = V(k)$ gilt. Außerdem ist für Pfeile $a\colon i \to j$ mit $M = \Psi(V)$

$$W(a)(m\varepsilon_i) = ma\varepsilon_j = (ma)_j = V(a)(m_i) = V(a)(m\varepsilon_i),$$

also $W(a) = V(a)$.

(4) Die "Natürlichkeit" der Isomorphismen bedeutet folgendes: Bezeichne für jeden endlichdimensionalen A-Modul M den eben konstruierten Isomorphismus $\Psi\Phi(M) \simeq M$ mit α_M, und für jede Darstellung V von Γ mit β_V den Isomorphismus $\Phi\Psi(V) \simeq V$. Dann bedeutet die Natürlichkeit der beiden Isomorphismen gerade, dass für jedes $f \in \mathrm{Hom}_A(M, N)$ und jedes $g \in \mathrm{Hom}_\Gamma(V, W)$ die Diagramme

$$\begin{array}{ccc} \Psi\Phi(M) & \xrightarrow{\alpha_M} & M \\ {\scriptstyle \Psi\Phi(f)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ \Psi\Phi(N) & \xrightarrow{\alpha_N} & N \end{array} \qquad \text{und} \qquad \begin{array}{ccc} \Phi\Psi(V) & \xrightarrow{\beta_V} & V \\ {\scriptstyle \Phi\Psi(g)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle g} \\ \Phi\Psi(W) & \xrightarrow{\beta_W} & W \end{array}$$

kommutieren. Dies verifiziere man als ÜBUNG. (Man sagt auch, dass der Funktor $\Psi\Phi$ (natürlich) isomorph ist zum identischen Funktor, und ebenso $\Phi\Psi$.) $\square$

ÜBUNG 7.3.4. Sei Γ der Köcher $\overset{1}{\circ}\longrightarrow\overset{2}{\circ}$.

(a) Man zeige, dass die Wegealgebra $K\Gamma$ isomorph ist zur Algebra $A = \begin{pmatrix} K & K \\ 0 & K \end{pmatrix} \subset \mathrm{M}_2(K)$, die aus den oberen 2×2-Dreiecksmatrizen über K besteht. (Zwei K-Algebren sind *isomorph*, falls es einen K-linearen Ringisomorphismus gibt.)

(b) Einen endlichdimensionalen A-Modul (Rechtsmodul) kann man auffassen als direkte Summe $V \oplus W$ endlichdimensionaler Vektorräume, gebildet zu einem Tripel (V, W, f) mit einer linearen Abbildung $f\colon V \longrightarrow W$. (Warum?) Man erläutere, wie dabei die Operation

$$(v, w) \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$$

definiert ist.

ÜBUNG 7.3.5. Sei Γ der Einschlaufenköcher.

(a) Man zeige $K\Gamma \simeq K[T]$ (Polynomring über K in der Unbestimmten T). Man zeige, dass die (unzerlegbaren) Darstellungen $(K^n, J_n(\lambda))$ aus Proposition 7.2.24 zu den endlichdimensionalen (unzerlegbaren) $K[T]$-Moduln $K[T]/((T-\lambda)^n)$ korrespondieren.

(b) Sei $K = \mathbb{C}$. Was sind die (endlichdimensionalen) einfachen $K[T]$-Moduln?

Literaturverzeichnis

[1] F. W. Anderson, K. R. Fuller: *Rings and Categories of Modules*, Springer Verlag, New York, 1974.

[2] I. Assem, D. Simson, A. Skowroński: *Elements of the Representation Theory of Associative Algebras. 1: Techniques of Representation Theory*, Cambridge University Press, Cambridge, 2006.

[3] M. Auslander, I. Reiten, S. O. Smalø: Representation Theory of Artin Algebras. Cambridge University Press, Cambridge, 1995.

[4] R. S. Pierce: *Associative Algebras*, Springer Verlag, New York, 1982.