# II. ÜBUNG zu GRUNDZÜGE der ALGEBRA

Abgabe: Do (!), 2. Nov. 2006, 11:00 Uhr in den orangen Kasten Nr. **8**

`http://math-www.upb.de/~dirk/Vorlesungen/GZ-Algebra/`

Bitte geben Sie außer Ihrem Namen auch **deutlich** die Übungsgruppe mit an.

**4. Aufgabe:** Sei $G$ die Teilmenge

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} \right\}$$

von $S_4$. Man zeige, dass $G$ eine Untergruppe von $S_4$ ist.

Sei $H$ die Untergruppe von $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$, bestehend aus den Matrizen

$$\pm \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \pm \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}.$$

**a)** $G$ und $H$ sind isomorph.

**b)** Finde eine Gruppe $K$, so dass $G$ (bzw. $H$) isomorph ist zu $K \times K$. 10 P.

**5. Aufgabe:** **a)** Sei $G$ eine Gruppe der Ordnung $n \geq 2$. Dann ist $G \times G$ nicht zyklisch.

**b)** Sei $G$ eine unendliche Gruppe. Dann ist $G \times G$ nicht zyklisch. 10 P.

**6. Aufgabe:** Sei $G = \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ die Menge aller $2 \times 2$-Matrizen $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ mit $a$, $b$, $c$, $d \in \mathbb{Z}$ und $ad - bc = 1$.

**a)** Man zeige, dass $G$ (mit der Matrizenmultiplikation) eine Gruppe ist.

**b)** Man bestimme die Ordnungen der Elemente $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. (Dabei ist die Ordnung eines Elementes $g$ in einer Gruppe per Definition die Ordnung der von $g$ erzeugten Untergruppe.)

**c)** Welche Beziehung besteht zwischen $ABA$ und $BAB$? Welche zwischen $A^{-1}BA^{-1}$ und $BA^{-1}B$?

**d)** Man bestimme jeweils ein Element der Ordnung 3 und 6. 10 P.