IV. ÜBUNG zu GRUNDZÜGE der ALGEBRA

Abgabe: MI, 15. NOV. 2006, 11:00 UHR in den orangen Kasten Nr. **8**

`http://math-www.upb.de/~dirk/Vorlesungen/GZ-Algebra/`

Bitte geben Sie außer Ihrem Namen auch **deutlich** die Übungsgruppe mit an.

10. Aufgabe: Sei p eine Primzahl. Man zeige, dass jede Gruppe der Ordnung p^2 isomorph ist zur zyklischen Gruppe C_{p^2} oder zu $C_p \times C_p$. 10 P.

11. Aufgabe: Sei $n \geq 3$ eine natürliche Zahl, und betrachte die Zahlen

$$z_k = e^{2\pi ik/n}, \quad k = 0, 1, \ldots, n-1$$

auf dem Einheitskreis. Verbindet man die Punkte z_k mit z_{k+1}, so erhält man ein reguläres n-Eck F_n mit Ecken $z_0, \ldots, z_{n-1}$. Wir betrachten die *Symmetriegruppe* dieses n-Ecks, die sich zusammensetzt aus Drehungen um den Winkel $2\pi/n$ und Spiegelungen: Die Abbildungen

$$r : F_n \longrightarrow F_n,\ z \mapsto ze^{2\pi i/n} \quad \text{und} \quad s : F_n \longrightarrow F_n, \quad z \mapsto \overline{z} \quad \text{(komplexe Konjugation)}$$

sind bijektiv, also Elemente der Gruppe G der bijektiven Abbildungen von F_n in sich. Schreibe fg für $f \circ g$.

a) Man zeige: r und s haben die Ordnungen n bzw. 2, und es gilt $sr = r^{-1}s$.

b) Die kleinste Untergruppe von G, die r und s enthält, wird D_n genannt. (D_n besteht offenbar aus allen möglichen Produkten, die man aus r und s sowie deren Inversen bilden kann; man beachte dabei a).) Man zeige: die Ordnung von D_n ist $2n$. Für $n = 3$ und $n = 4$ erstelle man jeweils explizit die Verknüpfungstafeln.

c) (Für $n = 4$:) Man bestimme alle Untergruppen von D_4. Welche davon sind Normalteiler in D_4?

d) Für beliebiges n bestimme man das Zentrum $Z(D_n)$. 10 P.

12. Aufgabe: **a)** Man zeige: Das Zentrum $Z(S_4)$ der symmetrischen Gruppe S_4 besteht nur aus dem neutralen Element. (HINWEIS: Ist $\sigma \in Z(S_4)$, so vertauscht σ insbesondere mit Transpositionen. Ist $\sigma \neq 1$, so gibt es $i \neq j$ mit $\sigma(i) = j$.)

b) Sei $\tau(i, j) \in S_4$ die Transposition $(i\ j)$. Für $\sigma \in S_4$ vermute (und beweise) man eine "Formel"

$$\sigma\tau(i, j)\sigma^{-1} = ?$$

und bestimme damit die Konjugationsklasse $C(\tau(i, j))$ sowie den Zentralisator $Z(\tau(i, j))$ von $\tau(i, j)$ in S_4. 10 P.