V. ÜBUNG zu GRUNDZÜGE der ALGEBRA

Abgabe: MI, 22. NOV. 2006, 11:00 UHR in den orangen Kasten Nr. **8**

http://math-www.upb.de/~dirk/Vorlesungen/GZ-Algebra/

Bitte geben Sie außer Ihrem Namen auch **deutlich** die Übungsgruppe mit an.

VORBEMERKUNGEN: Für zwei natürliche Zahlen m und n wird deren größter gemeinsamer Teiler mit $\mathrm{ggT}(m,n)$ bezeichnet; nach Definition ist dies *die* natürliche Zahl d, die m *und* n teilt, und jede andere natürliche Zahl, die auch m und n teilt, muss schon d teilen. m und n heissen teilerfremd, falls $\mathrm{ggT}(m,n) = 1$ gilt. Man mache sich folgende Aussagen klar und mache dann in der folgenden Aufgabe freien Gebrauch davon: (1) Sind m, n und k natürliche Zahlen, m und n teilerfremd, und teilt m das Produkt nk, so teilt m schon k; wird k von m und von n geteilt, so wird k auch von mn geteilt. (2) Ist $d = \mathrm{ggT}(m,n)$, so sind m/d und n/d teilerfremd.

13. Aufgabe: **a)** Sei G eine Gruppe, seien $a, b \in G$ von endlicher Ordnung m bzw. n, und es gelte $ab = ba$ und $\mathrm{ggT}(m,n) = 1$. Es sei $s \in \mathbb{N}$, $s \geq 1$, mit $(ab)^s = e$. Man zeige, dass a^s und b^s dieselbe Ordnung haben, und dass diese Ordnung schon $= 1$ sein muss, also $a^s = e = b^s$.

b) Es gelten dieselben Voraussetzungen wie in a). Dann hat das Element ab die Ordnung mn.

c) Falls m und n teilerfremd sind, so ist $\mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n$ isomorph zu $\mathbb{Z}_{mn}$. (HINWEIS: Teil b); man beachte: dort "multiplikative", hier "additive" Schreibweise der Verknüpfung.)

d) Sei $G = \langle g \rangle$ eine zyklische Gruppe der Ordnung n. Ist $k \in \mathbb{N}$, so hat das Element g^k die Ordnung $n/\mathrm{ggT}(k,n)$. 10 P.

14. Aufgabe: **a)** Sei G eine Gruppe mit Zentrum $Z(G)$, so dass die Faktorgruppe $G/Z(G)$ zyklisch ist. Man zeige, dass G abelsch ist.

b) Sei G endlich. Man zeige, dass der Index $[G : Z(G)]$ keine Primzahl sein kann. 10 P.

15. Aufgabe: Seien K und N Normalteiler in der Gruppe G mit $K \subseteq N$. Dann ist N/K ein Normalteiler in G/K, und die Gruppen $(G/K)/(N/K)$ und G/N sind isomorph. 10 P.