## Beispiel zur Berechnung der Jordanschen Normalform

BEMERKUNG 23.13: Oftmals ist man nicht nur an der Jordanschen Normalform an sich interessiert, sondern auch an einer Basis $\mathcal{B}$, bzgl. welcher $\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f)$ eine Jordan-Matrix ist, bzw. an einem $P \in \mathrm{GL}(n; K)$, so dass $P^{-1}AP$ eine Jordanmatrix ist. Der Beweis von Satz 23.2 gibt eine Idee, wie man eine solche Basis bestimmen kann. Für *jeden* Eigenwert $\lambda = \lambda_i$ betrachtet man $g \overset{def}{=} f - \lambda \cdot 1_V$, und mit den Unterräumen $U_j \overset{def}{=} \mathrm{Kern}(g^j)$ die aufsteigende Kette

$$\{0\} = U_0 \subsetneq U_1 \subsetneq \ldots \subsetneq U_{q-1} \subsetneq U_q = H(f, \lambda),$$

zum Hauptraum von $f$ zum Eigenwert $\lambda$. (Wir unterdrücken dabei durchweg den Index $i$, um nicht zu viele Indizes zu haben.) Man bestimmt Basen $\mathcal{B}_j$ all dieser Unterräume $U_j$ $(j < q)$. Man ergänzt (mit dem Verfahren 10.4) dann $\mathcal{B}_{q-1}$ mit $v_1^{(1)}, \ldots, v_{s_1}^{(1)}$ zu einer Basis von $U_q = H(f, \lambda)$. $U_{q-1}$. In 23.2 genügte hier ein einziger Vektor, da es sich um den unzerlegbaren Fall handelte. Allgemein können hier aber mehr Vektoren nötig sein. Auf die ergänzenden Vektoren wendet man nun $f$ an: die Bildvektoren $g(v_1^{(1)}), \ldots, g(v_{s_1}^{(1)})$ bilden (wegen (23.2)) zusammen mit der Basis $\mathcal{B}_{q-2}$ eine freie Teilmenge von $U_{q-1}$, die man ggfs. durch $v_1^{(2)}, \ldots, v_{s_2}^{(2)}$ zu einer Basis von $U_{q-1}$ ergänzt ($s_2$ kann $= 0$ sein). Auf die schon gebildeten Bildvektoren wendet man erneut $g$ an und auch auf die neu ergänzten Vektoren, und diese Bildvektoren bilden dann (wegen (23.2)) mit $\mathcal{B}_{q-3}$ eine freie Teilmenge in $U_{q-2}$, u.s.w. Auf diese Weise arbeitet man sich durch sukzessive Anwendung von $g$ von rechts nach links durch obige Kette von Unterräumen bis man links angelangt ist. Schließlich sammelt man alle Vektoren in der folgenden Form Zeile für Zeile auf:

$$\begin{array}{llll}
v_1^{(1)}, & g(v_1^{(1)}), & \ldots, & g^{q-1}(v_1^{(1)}), \\
 & \vdots & & \vdots \\
v_{s_1}^{(1)}, & g(v_1^{(1)}), & \ldots, & g^{q-1}(v_{s_1}^{(1)}), \\
v_1^{(2)}, & g(v_1^{(2)}), & \ldots, & g^{q-2}(v_1^{(2)}), \\
 & \vdots & & \vdots \\
v_{s_2}^{(2)}, & g(v_{s_2}^{(2)}), & \ldots, & g^{q-2}(v_{s_2}^{(2)}), \\
 & \vdots & & \vdots
\end{array}$$

wobei aber einige der Zahlen $s_2, s_3, \ldots$ auch $= 0$ sein können.

Dies wird für jeden Eigenwert $\lambda$ von $f$ durchgeführt, und anschließend werden die so konstruierten Basen der einzelnen Haupträume zu einer Basis von $V$ zusammengesetzt. – Dies wird am folgenden kleinen Beispiel illustriert.

Beispiel 23.14: Sei

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & -1 & 0 & 0 & -7 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 7 & 32 & 3 & 15 & -77 \\ 0 & 1 & -10 & 0 & -2 & 16 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_6(\mathbb{R}).$$

Sei $f\colon \mathbb{R}^6 \to \mathbb{R}^6$, $x \mapsto Ax$ die zugehörige lineare Abbildung. Wir berechnen eine Basis $\mathcal{B}$ von $V = \mathbb{R}^6$ (bzw. ein $P \in \mathrm{GL}_6(\mathbb{R})$), so dass $M_{\mathcal{B}}(f)$ (bzw. $P^{-1}AP$) eine Jordansche Normalform ist.

Man berechnet das charakteristische Polynom:

$$\chi_f = T^6 - 8T^5 + 10T^4 + 60T^3 - 135T^2 - 108T + 324 = (T+2)^2(T-3)^4.$$

Damit zerfällt $\chi_f$, also ist $f$ trigonalisierbar. $\lambda_1 = -2$ und $\lambda_2 = 3$ sind die Eigenwerte von $f$.

Da hier 2 die algebraische Vielfachheit von $\lambda_1$ und 4 die algebraische Vielfachheit von $\lambda_2$ ist, berechnet man die Unterräume

$$H(f,-2) = \mathrm{Kern}((f - \lambda_1 \cdot 1)^2)$$

und

$$H(f,3) = \mathrm{Kern}((f - \lambda_2 \cdot 1)^4).$$

Es gilt $\mathbb{R}^6 = H(f,-2) \oplus H(f,3)$, und $H(f,-2)$ und $H(f,3)$ sind $f$-invariante Unterräume von $\mathbb{R}^6$ (Hauptraumzerlegung).

Seien $f_1\colon H(f,-2) \to H(f,-2)$, $x \mapsto f(x)$ bzw. $f_2\colon H(f,3) \to H(f,3)$, $x \mapsto f(x)$ die Einschränkungen von $f$ auf die Haupträume.

Es ist

$$(A + 2E_6)^2 = \begin{pmatrix} 25 & 25 & -10 & 0 & 0 & -21 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 50 \\ 0 & 0 & 25 & 0 & 0 & 10 \\ 0 & 50 & 170 & 25 & 75 & -428 \\ 0 & 0 & -50 & 0 & 0 & 80 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 25 \end{pmatrix}.$$

Die dazu gehörige Treppenmatrix ist

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Es ist somit

$$\begin{aligned}
H(f,-2) &= \operatorname{Kern}((f+2\cdot 1)^2)\\
&= \{x\in\mathbb{R}^6 \mid (f+2\cdot 1)^2(x)=0\}\\
&= \{x\in\mathbb{R}^6 \mid (A+2E_n)^2x=0\}\\
&= \{x\in\mathbb{R}^6 \mid x = r\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2}\\ 0\\ -1\\ 0\\ 0\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}-\frac{3}{2}\\ \frac{3}{2}\\ 0\\ 0\\ -1\\ 0\end{pmatrix} \text{ mit } r,s\in\mathbb{R}\}
\end{aligned}$$

Wir multiplizieren die beiden Vektoren jeweils mit $-2$ und erhalten

$$v_1 := \begin{pmatrix}1\\ -1\\ 0\\ 2\\ 0\\ 0\end{pmatrix} \text{ und } v_2 := \begin{pmatrix}3\\ -3\\ 0\\ 0\\ 2\\ 0\end{pmatrix}.$$

Somit ist $\mathcal{B}_{12} := (v_1, v_2)$ eine geordnete Basis von $H(f,-2)$. Wegen

$$f_1(v_1) = f(v_1) \quad = Av_1 \quad = \begin{pmatrix}-2\\ 2\\ 0\\ -1\\ -1\\ 0\end{pmatrix} = -\frac{1}{2}v_1 - \frac{1}{2}v_2$$

$$f_1(v_2) = f(v_2) \quad = Av_2 \quad = \begin{pmatrix}-6\\ 6\\ 0\\ 9\\ -7\\ 0\end{pmatrix} = \frac{9}{2}v_1 - \frac{7}{2}v_2$$

ist

$$A_1 = M_{\mathcal{B}_{12}}(f_1) = \begin{pmatrix}-\frac{1}{2} & \frac{9}{2}\\ -\frac{1}{2} & -\frac{7}{2}\end{pmatrix}.$$

Sei $g_1 = f_1 - \lambda_1 \cdot 1\colon H(f,-2) \to H(f,-2)$. Offenbar ist 0 der einzige Eigenwert von $g_1$, und daher ist $g_1$ nilpotent. Damit

$$C_1 := A_1 + 2E_2 = M_{\mathcal{B}_{12}}(g_1) = \begin{pmatrix}\frac{3}{2} & \frac{9}{2}\\ -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2}\end{pmatrix}.$$

Es ist

$$C_1^2 = \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}.$$

Man berechnet $U_{1i} = \mathrm{Kern}(g_1^i)$ und Basen davon:

$$\{0\} = U_{10} \subset U_{11} \subset U_{12} = H(f, -2).$$

Die Treppenmatrix zu $C_1$ ist

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Wir erhalten hieraus den Koordinatenvektor $\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$. Hieraus erhält man den Vektor $v := 3v_1 - 1v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 6 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ als Basis $\mathcal{B}_{11}$ von $U_{11}$.

Nun ergänzt man $\mathcal{B}_{11}$ z. B. mittels $v_1$ zu einer Basis von $U_{12}$. Desweiteren ist

$$g_1(v_1) = (f_1 + 2 \cdot 1)(v_1) = (f + 2 \cdot 1)(v_1) = (A + 2E_n)v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$\{g_1(v_1)\}$ ist in $U_{11}$ linear unabhängig und wegen $\dim U_{11} = 1$ eine Basis von $U_{11}$. Es ist also keine Ergänzung mehr notwendig. Insgesamt folgt also, dass $\mathcal{B}_1 = (v_1, g_1(v_1))$ wieder eine Basis von $H(f, -2)$ ist. Bzgl. dieser wird $g_1$ (bzw. $f_1$) dargestellt durch

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ (bzw. } \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \text{ ).}$$

Wir haben noch $H(f, 3)$ zu behandeln: Es ist

$$(A - 3E_6)^4 = \begin{pmatrix} 0 & -625 & 0 & 0 & 0 & 1250 \\ 0 & 625 & 0 & 0 & 0 & -1250 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 250 & -3750 & 0 & -1875 & 7000 \\ 0 & -500 & 1250 & 0 & 625 & -1500 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Treppenmatrix ist

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Seien $w_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, w_2 := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, w_3 := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $w_4 := \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Es ist $\mathcal{B}_{23} := (w_1, w_2, w_3, w_4)$ eine geordnete Basis von $H(f, 3)$. Wegen

$$f_2(w_1) = f(w_1) \quad = Aw_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 3w_1 + 0w_2 + 0w_3 + 0w_4$$

$$f_2(w_2) = f(w_2) \quad = Aw_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0w_1 + 3w_2 + 0w_3 + 0w_4$$

$$f_2(w_3) = f(w_3) \quad = Aw_3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ -\frac{3}{2} \\ -1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}w_1 - 1w_2 + 3w_3 + 0w_4$$

$$f_2(w_4) = f(w_4) \quad = Aw_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 7 \\ 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} = 1w_1 + 1w_2 - 2w_3 + 3w_4$$

ist

$$A_2 = M_{\mathcal{B}_{23}}(f_2) = \begin{pmatrix} 3 & 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Sei $g_2 = f_2 - \lambda_2 \cdot 1 \colon H(f,3) \to H(f,3)$. Offenbar ist 0 der einzige Eigenwert von $g_2$, und daher ist $g_2$ nilpotent. Damit

$$C_2 := A_2 - 3E_4 = M_{\mathcal{B}_{23}}(g_2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Es ist

$$C_2^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

und

$$C_2^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Man berechnet $U_{2i} = \mathrm{Kern}(g_2^i)$ und Basen davon:

$$\{0\} = U_{20} \subset U_{21} \subset U_{22} \subset U_{23} = H(f,3).$$

Die Treppenmatrizen zu $C_2$ und $C_2^2$ sind

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ bzw. } \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Daher erhält man als Basen $\mathcal{B}_{21} := \{w_1, w_2\}$ von $U_{21}$ sowie $\mathcal{B}_{22} := \{w_1, w_2, w_3\}$ von $U_{22}$.

Man ergänzt nun $\mathcal{B}_{22}$ z. B. mittels $w_4$ zu einer Basis von $U_{23}$.

Dann ist

$$g_2(w_4) = (f_2 - 3 \cdot 1_V)(w_4) = (f - 3 \cdot 1_V)(w_4) = (A - 3E_4)w_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$\mathcal{B}_{21} \cup \{g_2(w_4)\}$ ist dann ein linear unabhängiges System in $U_{22}$ und wegen $\dim U_{22} = 3$ eine Basis von $U_{22}$.

Desweiteren ist

$$g_2^2(w_4) = (f_2 - 3 \cdot 1)(w_4) = (f - 3 \cdot 1)(w_4) = (A - 3E_4)^2 w_4 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

und $\mathcal{B}_{20} \cup \{g_2^2(w_4)\} = \{g_2^2(w_4)\}$ ist linear unabhängig in $U_{21}$. Da $\dim U_{21} = 2$ ist, müssen wir $\{g_2^2(w_4)\}$ mittels eines hierzu linear unabhängigen Vektors aus $U_{21}$ ergänzen. Z. B. ist dann $\{g_2^2(w_4), w_1\}$ eine Basis von $U_{21}$.
Insgesamt erhalten wir hieraus die geordnete Basis

$$\mathcal{B}_2 := (w_4, g_2(w_4), g_2^2(w_4), w_1),$$

bezüglich welcher $g_2$ (bzw. $f_2$) dargestellt wird durch die Matrix

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{bzw.} \quad \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad ).$$

Setzt man nun die gefundenen Basen $\mathcal{B}_1$ von $H(f,-2)$ und $\mathcal{B}_2$ von $H(f,3)$ zu einer Basis $\mathcal{B}$ zusammen, so erhält man: Bzgl. der Basis

$$\mathcal{B} := (v_1, g_1(v_1), w_4, g_2(w_4), g_2^2(w_4), w_1)$$

wird $f$ dargestellt durch die Matrix

$$\begin{pmatrix} -2 & & & & & \\ 1 & -2 & & & & \\ & & 3 & & & \\ & & 1 & 3 & & \\ & & & 1 & 3 & \\ & & & & & 3 \end{pmatrix}.$$

Setzt man die Basisvektoren als Spalten zu einer (invertierbaren) Matrix $P$ zusammen, so erhält man

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

damit

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & \frac{5}{2} & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & -7 \\ 1 & 2 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & -7 \end{pmatrix}$$

und

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -2 & & & & & \\ 1 & -2 & & & & \\ & & 3 & & & \\ & & 1 & 3 & & \\ & & & 1 & 3 & \\ & & & & & 3 \end{pmatrix}.$$