

Beispiel zur Berechnung der Jordanschen Normalform

Sei

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \in M_6(\mathbb{R}).$$

Sei $f: \mathbb{R}^6 \rightarrow \mathbb{R}^6$, $x \mapsto Ax$ die zugehörige lineare Abbildung. Wir berechnen eine Basis \mathcal{B} von $V = \mathbb{R}^6$ (bzw. ein $P \in GL_6(\mathbb{R})$), so dass $M_{\mathcal{B}}(f)$ (bzw. $P^{-1}AP$) eine Jordansche Normalform ist.

Man berechnet das charakteristische Polynom:

$$\chi_f = T^6 - 9T^5 + 33T^4 - 63T^3 + 66T^2 - 36T + 8 = (T - 1)^3(T - 2)^3.$$

Damit zerfällt χ_f , also ist f trigonalisierbar. $\lambda_1 = 1$ und $\lambda_2 = 2$ sind die Eigenwerte von f .

Da hier 3 die algebraische Vielfachheit von λ_1 und λ_2 ist, berechnet man die Haupträume $H_1 = H(f, \lambda_1) = \text{Kern}((f - \lambda_1 \cdot 1)^3)$ und $H_2 = H(f, \lambda_2) = \text{Kern}((f - \lambda_2 \cdot 1)^3)$. Es gilt $\mathbb{R}^6 = H_1 \oplus H_2$, und H_1 und H_2 sind f -invariante Unterräume von \mathbb{R}^6 (Hauptraumzerlegung).

Seien $f_1: H_1 \rightarrow H_1$, $x \mapsto f(x)$ bzw. $f_2: H_2 \rightarrow H_2$, $x \mapsto f(x)$ die Einschränkungen von f auf die Haupträume.

Es ist

$$(A - E_6)^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Die dazu gehörige Treppenmatrix ist

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Man erhält, dass $\mathcal{B}_{13} : e_1, e_2, e_6$ eine Basis von H_1 ist. (Hierbei bezeichnet e_1, e_2, \dots, e_6 die Standardbasis von \mathbb{R}^6 .) Wegen

$$\begin{aligned} f(e_1) &= 2e_2 - e_6 \\ f(e_2) &= e_2 \\ f(e_6) &= e_1 - e_2 + 2e_6 \end{aligned}$$

ist

$$A_1 = M_{\mathcal{B}_{13}}(f_1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Sei $g_1 = f_1 - \lambda_1 \cdot 1 : H_1 \rightarrow H_1$. Offenbar ist 0 der einzige Eigenwert von g_1 , und daher ist g_1 nilpotent. Damit

$$C_1 := A_1 - E_3 = M_{\mathcal{B}_{13}}(g_1) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Es ist

$$C_1^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

und $C_1^3 = 0$. Man berechnet $U_{1i} = \text{Kern}(g_1^i)$ und Basen davon:

$$\{0\} = U_{10} \subset U_{11} \subset U_{12} \subset U_{13} = H_1.$$

Die Treppenmatrizen zu C_1 und C_1^2 sind

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ bzw. } \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Daher erhält man als Basis $\mathcal{B}_{11} : e_2$ von U_{11} und $\mathcal{B}_{12} : e_2, e_1 + e_6$ von U_{12} .

Nun ergänzt man \mathcal{B}_{12} z. B. mittels e_1 zu einer Basis von U_{13} . Dann bildet $\mathcal{B}_{11} \cup \{g_1(e_1)\}$ in U_{12} ein linear unabhängiges System und wegen $\dim U_{12} = 2$ eine Basis. Es ist also keine Ergänzung mehr notwendig. $g_1^2(e_1)$ bildet eine Basis von U_{11} . Es ist $g_1(e_1) = -e_1 + 2e_2 - e_6$ und $g_1^2(e_1) = -e_2$. Daher ist $\mathcal{B}_1 : e_1, -e_1 + 2e_2 - e_6, -e_2$ eine Basis von H_1 , bzgl. derer g_1 (bzw. f_1) dargestellt wird durch

$$\begin{pmatrix} 0 & & \\ 1 & 0 & \\ & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ (bzw. } \begin{pmatrix} 1 & & \\ 1 & 1 & \\ & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{)}.$$

Wir haben noch H_2 zu behandeln: Es ist

$$(A - 2E_6)^3 = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 9 & -1 & -1 & 0 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Treppenmatrix ist

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Daher ist $\mathcal{B}_{22} : e_2 - e_3, e_4, e_5$ eine Basis von H_2 . Wegen

$$\begin{aligned} f(e_2 - e_3) &= 2(e_2 - e_3) \\ f(e_4) &= -(e_2 - e_3) + 2e_4 \\ f(e_5) &= 2e_5 \end{aligned}$$

ist

$$A_2 = M_{\mathcal{B}_{22}}(f_2) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Sei $g_2 = f_2 - \lambda_2 \cdot 1 : H_2 \rightarrow H_2$. Offenbar ist 0 der einzige Eigenwert von g_2 , und daher ist g_2 nilpotent. Damit

$$C_2 := A_2 - 2E_3 = M_{\mathcal{B}_{22}}(g_2) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Es ist $C_2^2 = 0$. Man berechnet $U_{2i} = \text{Kern}(g_2^i)$ und Basen davon:

$$\{0\} = U_{20} \subset U_{21} \subset U_{22} = H_2.$$

Die Treppenmatrizen zu C_2 ist

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Daher erhält man als Basis $\mathcal{B}_{21} : e_2 - e_3, e_5$ von U_{21} .

Man ergänzt nun \mathcal{B}_{21} z. B. mittels e_4 zu einer Basis von U_{22} . Dann ist $g_2(e_4) = -(e_2 - e_3)$ in U_{21} linear unabhängig und kann z. B. mittels

e_5 zu einer Basis von U_{22} ergänzt werden. Man erhält also: Bzgl. der Basis $\mathcal{B}_2 : e_4, -e_2 + e_3, e_5$ wird g_2 (bzw. f_2) dargestellt durch die Matrix

$$\begin{pmatrix} 0 & & \\ 1 & 0 & \\ & & 0 \end{pmatrix} \text{ (bzw. } \begin{pmatrix} 2 & 0 & \\ 1 & 2 & \\ & & 2 \end{pmatrix} \text{)}.$$

Setzt man nun die gefunden Basen \mathcal{B}_1 von H_1 und \mathcal{B}_2 von H_2 zu einer Basis \mathcal{B} zusammen, so erhält man: Bzgl. der Basis

$$\mathcal{B} : e_1, -e_1 + 2e_2 - e_6, -e_2, e_4, -e_2 + e_3, e_5$$

wird f dargestellt durch die Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ 1 & 1 & & & & \\ & 1 & 1 & & & \\ & & & 2 & & \\ & & & 1 & 2 & \\ & & & & & 2 \end{pmatrix}.$$

Setzt man die Basisvektoren als Spalten zu einer (invertierbaren) Matrix P zusammen, so erhält man

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

damit

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ 1 & 1 & & & & \\ & 1 & 1 & & & \\ & & & 2 & & \\ & & & 1 & 2 & \\ & & & & & 2 \end{pmatrix}.$$

Man liest daran ab:

$$\mu_f = (T - 1)^3(T - 2)^2.$$