I. ÜBUNG ZUR LINEAREN ALGEBRA II

Abgabe: bis Mi, 22. Apr. 2009, 11:00 Uhr in die Kästen 109, 110 bzw. 119.

`http://math-www.upb.de/~dirk/Vorlesungen/LA-2/`

In jeder Aufgabe sind maximal 10 Punkte erreichbar. Es bezeichnet K immer einen Körper und $n \in \mathbb{N}$ eine natürliche Zahl.

1. Aufgabe: Man zeige:

(a) Jeder Teilring eines Körpers ist ein Integritätsbereich.

(b) Sei R ein kommutativer Ring, seien a, $b \in R$. Ist ab eine Einheit in R, so auch a.

(c) Seien R und S isomorphe Ringe. Man zeige, dass deren Einheitengruppen $E(R)$ und $E(S)$ isomorph sind.

(d) Sei R ein Integritätsbereich. Sei X die Menge aller Paare $(a, b) \in R \times R$ mit $b \neq 0$. Man zeige, dass durch $(a, b) \sim (c, d) \overset{def}{\Leftrightarrow} ad = bc$ eine Äquivalenzrelation auf X definiert wird.

2. Aufgabe: Man überlege sich, welche der Regeln (D4)–(D9) aus Satz 14.5 und welche weiteren Sätze für Determinanten über Körpern auch über kommutativen Ringen gelten.

3. Aufgabe: Sei R ein kommutativer Ring, und sei $A \in \mathrm{M}(n; R)$.

(a) Es habe A eine Zeile, die nur aus einer Nichteinheit und ansonsten nur Nullen besteht. Man zeige:

 (a) $\det(A) \notin E(R)$.

 (b) A ist nicht invertierbar in $\mathrm{M}(n; R)$.

(b) Durch elementare Zeilenumformungen vom Typ II und III bringe man A auf obere Dreiecksgestalt

$$\Delta = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & * & \\ & 0 & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix},$$

und es gilt dann, wie man sich überzeugt, $\det(A) = \pm\lambda_1 \cdot \ldots \cdot \lambda_n$. Man zeige die Äquivalenzen

$$\det(A) \in E(R) \quad \Leftrightarrow \quad \lambda_i \in E(R) \text{ für alle } i \quad \Leftrightarrow \quad \Delta \text{ invert.} \quad \Leftrightarrow \quad A \text{ invert.}$$

4. Aufgabe: Man zeige, dass die durch

$$(f_n)_{n\geq 0} \cdot (g_n)_{n\geq 0} = \left(\sum_{i=0}^{n} f_i \cdot g_{n-i} \right)_{n\geq 0}$$

definierte Multiplikation von Polynomen mit Koeffizienten in dem Körper K assoziativ ist.

5. Aufgabe: Sei K ein Körper.

(a) Man bestimme die Einheitengruppe $E(K[T])$.

(b) Man zeige, dass die Menge der Polynome $f = a_0 + a_2T^2 + a_4T^4 + \cdots + a_{2n}T^{2n}$ $(n \geq 0)$ ein Teilring von $K[T]$ ist.