XIV. ÜBUNG ZUR LINEAREN ALGEBRA II

Abgabe: bis MI, 22. JULI 2009, 11:00 UHR in die Kästen 109, 110 bzw. 119.

http://math-www.upb.de/~dirk/Vorlesungen/LA-2/

In jeder Aufgabe sind maximal 10 Punkte erreichbar.

1. Aufgabe: Sei $K = \mathbb{R}$ oder $K = \mathbb{C}$ und V ein K-Vektorraum mit Skalarprodukt $\langle - \mid - \rangle$ sowie zugehörger Norm $\|-\|$. Man zeige, dass für $f \in \mathrm{End}_K(V)$ folgende Aussagen äquivalent sind:

(a) f ist normal.

(b) $\langle f(x) \mid f(y) \rangle = \langle f^*(x) \mid f^*(y) \rangle$ für alle $x, y \in V$.

(c) $\|f(x)\| = \|f^*(x)\|$ für alle $x \in V$.

2. Aufgabe: Man zeige Satz 30.9 aus der Vorlesung:

Sei $(V, \langle - \mid - \rangle)$ ein euklidischer Vektorraum der Dimension n. Sei $f \in \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(V)$. Dann sind äquivalent:

(a) f ist normal.

(b) Es gibt eine ONB $\mathcal{B}$ von V, so dass

$$M_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \lambda_s & & & \\ & & & \boxed{M_1} & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & \boxed{M_t} \end{pmatrix}$$

gilt, wobei $n = s + 2t$, $\lambda_1, \dots, \lambda_s \in \mathbb{R}$ und

$$M_i = \begin{pmatrix} a_i & b_i \\ -b_i & a_i \end{pmatrix} \in \mathrm{M}(2; \mathbb{R})$$

mit $b_i \neq 0$ gilt ($i = 1, \dots, t$).

(Hinweis: Man vgl. die Beweise von Satz 27.16, Lemma 27.17 und Übungsaufgabe XI.4.)

3. Aufgabe: Sei $A \in \mathrm{M}(n;\mathbb{C})$ *antihermitesch*, d. h. es gelte $-A = A^* \ (= \overline{{}^tA})$. Man zeige:

(a) A ist *normal*, d. h. es gilt $A \cdot A^* = A^* \cdot A$.

(b) Alle Eigenwerte von A liegen auf der imaginären Achse $i\mathbb{R}$.

4. Aufgabe: Sei K ein Körper, V ein K-Vektorraum und $U \subseteq V$ ein Unterraum. Definiere

$$U^\perp \overset{def}{=} \{\varphi \in V^* \mid \varphi(u) = 0 \text{ für alle } u \in U\}.$$

Man zeige:

(a) $U^\perp$ ist ein Unterraum von V^*.

(b) Sei V endlichdimensional. Dann gilt $\dim(V) = \dim(U) + \dim(U^\perp)$.

5. Aufgabe: Sei K ein Körper und V ein K-Vektorraum. Sei $f\colon V \to V$ ein Endomorphismus und $f^*\colon V^* \to V^*$ die duale Abbildung. Man zeige:

(a) Ist U ein f-invarianter Unterraum von V, so ist $U^\perp$ ein f^*-invarianter Unterraum von V^*.

(b) Es gilt $\mathrm{Kern}(f^*) = \mathrm{Bild}(f)^\perp$.

(c) Es gilt $\mathrm{Bild}(f^*) = \mathrm{Kern}(f)^\perp$.