IV. Übung zur Linearen Algebra II

Abgabe: bis Mi, 13. Mai 2009, 11:00 Uhr in die Kästen 109, 110 bzw. 119.

http://math-www.upb.de/~dirk/Vorlesungen/LA-2/

In jeder Aufgabe sind maximal 10 Punkte erreichbar. Es bezeichnet K immer einen Körper.

1. Aufgabe: Sei $A \in \mathrm{M}(n; K)$ definiert durch

$$A[i,j] = \begin{cases} \delta_{i,j+1} & i = 1, \dots, n;\ j = 1, \dots, n-1; \\ 0 & i = 1, \dots, n;\ j = n \end{cases}.$$

(Wie sieht A aus?)

(a) Für jedes $k = 1, \dots, n$ berechne man A^k.

(b) Für jedes $k = 1, \dots, n$ berechne man charakteristisches Polynom und Minimalpolynom der Matrix A^k, sowie Basen der Eigenräume zu A_k, algebraische und geometrische Vielfachheiten.

2. Aufgabe: Seien A, $B \in \mathrm{M}(n; K)$. Sei $p \in K[T]$. Man zeige:

(a) $A \approx B \quad \Rightarrow \quad p(A) \approx p(B)$.

(b) $A \approx B \quad \Rightarrow \quad \mu_A = \mu_B$.

(Erinnerung: $\approx$ bezeichnet Ähnlichkeit von quadratischen Matrizen.)

3. Aufgabe: Seien A, $B \in \mathrm{M}(n; K)$ trigonalisierbar. Man beweise oder widerlege:

(a) $\chi_A = \chi_B \quad \Rightarrow \quad \mu_A = \mu_B$.

(b) $\mu_A = \mu_B \quad \Rightarrow \quad \chi_A = \chi_B$.

Man tue dasselbe unter der Zusatzvoraussetzung, dass A und B diagonalisierbar sind.

4. Aufgabe: Sei $A \in \mathrm{M}(n; K)$, sei ${}^tA$ die transponierte Matrix. Man zeige:

(a) A und ${}^tA$ haben dasselbe charakteristische Polynom.

(b) A und ${}^tA$ haben dasselbe Minimalpolynom.

5. Aufgabe: Man berechne das Minimalpolynom von

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}(3; \mathbb{Q}).$$