

V. ÜBUNG ZUR LINEAREN ALGEBRA II

Abgabe: bis MI, 20. MAI 2009, 11:00 UHR in die Kästen 109, 110 bzw. 119.

<http://math-www.upb.de/~dirk/Vorlesungen/LA-2/>

In jeder Aufgabe sind maximal 10 Punkte erreichbar. Es bezeichnet K immer einen Körper.

1. Aufgabe: Sei

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \in M(4; \mathbb{R}).$$

Es ist $\chi_A = T^4 - 4T^3 + 6T^2 - 4T + 1$ (soll nicht gezeigt werden).

- (a) Man zeige, dass A trigonalisierbar ist.
- (b) Man zeige, dass A nicht diagonalisierbar ist.
- (c) Man bestimme $P \in GL(4; \mathbb{R})$, so dass $P^{-1}AP$ eine obere Dreiecksmatrix ist.

2. Aufgabe: Man zeige die folgenden Aussagen aus der Vorlesung:

- (a) Sei $h: (V, f) \rightarrow (W, g)$ ein Modulhomomorphismus. Ist X ein Untermodul von (W, g) , so ist das Urbild $h^{-1}(X)$ ein Untermodul von (V, f) .
- (b) Sei V ein endlichdimensionaler K -Vektorraum. Zwei Moduln der Form (V, f) und (V, g) sind genau dann isomorph, wenn es Basen \mathcal{B} und \mathcal{C} von V gibt mit $M_{\mathcal{B}}(f) = M_{\mathcal{C}}(g)$.

3. Aufgabe: Sei (V, f) ein Modul. Sei $\text{End}(V, f)$ die Menge aller Endomorphismen von (V, f) , also die Menge aller Modulhomomorphismen $h: (V, f) \rightarrow (V, f)$. Man zeige, dass $\text{End}(V, f)$ eine K -Algebra ist.

(Man stelle eine Beziehung zu $\text{End}_K(V)$ her.)

4. Aufgabe: Sei $f: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ der Endomorphismus, der bzgl. der Standardbasis durch die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \\ -4 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

gegeben ist.

- (a) Man bestimme für alle natürlichen Zahlen i Basen und Dimension von $\text{Kern}(f^i)$ und $\text{Bild}(f^i)$.
- (b) Für welche i gilt $\mathbb{R}^4 = \text{Kern}(f^i) \oplus \text{Bild}(f^i)$?
- (c) Ist der Modul (\mathbb{R}^4, f) unzerlegbar?

5. Aufgabe: Sei

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -2 & -4 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \in M(3; \mathbb{R}).$$

Man berechne A^{151} . Elektronische Hilfsmittel sind nicht erlaubt. (Ausdrücke wie 2^{151} müssen nicht weiter ausgerechnet werden.)