VI. ÜBUNG ZUR LINEAREN ALGEBRA II

Abgabe: bis MI, 27. MAI 2009, 11:00 UHR in die Kästen 109, 110 bzw. 119.

http://math-www.upb.de/~dirk/Vorlesungen/LA-2/

In jeder Aufgabe sind maximal 10 Punkte erreichbar. Es bezeichnet K immer einen Körper.

1. Aufgabe: Sei $f\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ der Endomorphismus mit $f(x) = Ax$, wobei

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 1 & -2 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}(4;\mathbb{R}).$$

Man zeige, dass f nilpotent ist und bestimme eine Basis von $\mathbb{R}^4$, bzgl. welcher f durch die Matrix $J_4(0)$ beschrieben wird.

(Man vergleiche die Beweise zu 23.1 und 23.2.)

2. Aufgabe: Wie viele Matrizen $A \in \mathrm{M}(6;\mathbb{R})$ mit $\chi_A = (T-3)^6$ gibt es bis auf Ähnlichkeit $\approx$?

3. Aufgabe: Sei f ein Endomorphismus von V, und es gelte $f^q = 0$, $f^{q-1} \neq 0$. Man zeige:

(a) Die Inklusionen

$$\{0\} = \mathrm{Kern}(f^0) \subsetneq \mathrm{Kern}(f^1) \subsetneq \ldots \subsetneq \mathrm{Kern}(f^{q-1}) \subsetneq \mathrm{Kern}(f^q) = V$$

alle echt sind.

(b) Sei $i \in \{2,\ldots,q\}$. Ist $x \in \mathrm{Kern}(f^i)$ und $x \notin \mathrm{Kern}(f^{i-1})$, so gilt $f(x) \in \mathrm{Kern}(f^{i-1})$ und $f(x) \notin \mathrm{Kern}(f^{i-2})$.

4. Aufgabe: Sei $A \in \mathrm{M}(n;K)$. Man zeige die folgenden Aussagen:

(a) Seien $n = n_1 + n_2$, $A_1 \in \mathrm{M}(n_1;K)$ und $A_2 \in \mathrm{M}(n_2;K)$. Dann gilt

$$A \approx \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad A \approx \begin{pmatrix} A_2 & 0 \\ 0 & A_1 \end{pmatrix}.$$

(b) A ist genau dann ähnlich zu einer oberen Dreiecksmatrix, wenn A ähnlich zu einer unteren Dreiecksmatrix ist.

5. Aufgabe: Sei $f\colon \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^5$ der Endomorphismus mit $f(x) = Ax$, wobei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 & -1 \\ -2 & 3 & 4 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & 6 & -1 & -2 \\ -2 & 0 & 5 & 1 & -3 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}(5; \mathbb{R}).$$

Es sei

$$\chi_f = (T-2)^2 \cdot (T-3)^3$$

schon berechnet. Man bestimme die Jordansche Normalform und das Minimalpolynom μ_f von f.