III. ÜBUNG ZU RINGE und MODULN

Abgabe: DO, 10. NOVEMBER 2005 in der Übung

http://math-www.upb.de/~dirk/Vorlesungen/Ringe_und_Moduln/

5. Aufgabe: Sei

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} L \longrightarrow 0$$

eine kurze exakte Folge. Man zeige die Äquivalenz der folgenden Aussagen:

(1) Es gibt $s \in \mathrm{Hom}(L, N)$ mit $g \circ s = 1_L$.

(2) Es gibt $r \in \mathrm{Hom}(N, M)$ mit $r \circ f = 1_M$.

(3) Man hat folgendes kommutative Diagramm exakter Folgen:

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & M \arrow[r, "f"] \arrow[d, equal] & N \arrow[r, "g"] \arrow[d, "h"] & L \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\ 0 \arrow[r] & M \arrow[r, "j"] & M \oplus L \arrow[r, "p"] & L \arrow[r] & 0, \end{tikzcd}$$

wobei j und p die kanonische Injektion bzw. Projektion ist und wobei h ein Isomorphismus ist.

Man zeige außerdem: Ein h wie im obigen Diagramm ist automatisch bijektiv. 10 P.

6. Aufgabe: Sei P ein A-Modul. Man zeige die Äquivalenz der folgenden Aussagen:

(1) P ist projektiv.

(2) Jede kurze exakte Folge $0 \longrightarrow M \longrightarrow N \longrightarrow P \longrightarrow 0$ spaltet auf.

(3) Zu jedem Epimorphismus $g : M \longrightarrow N$ und jedem Homomorphismus $h : P \longrightarrow N$ gibt es einen Homomorphismus $\overline{h} : P \longrightarrow M$, so dass $g \circ \overline{h} = h$ gilt. 10 P.

Mündliche Aufgabe: Injektive Moduln werden "dual" zu projektiven Moduln definiert. Welche Bedingungen eignen sich zum "Dualisieren", und wie lauten dann die Eigenschaften injektiver Moduln?