III. ÜBUNG ZUR TOPOLOGIE

http://math-www.upb.de/~dirk/Vorlesungen/Topologie/

11. Aufgabe: Sei X ein topologischer Raum, sei $A \subseteq X$ und $x \in X$. Man zeige:

a) Genau dann gilt $x \in A^\circ$, wenn $A \in \mathcal{F}$ gilt für jeden Filter $\mathcal{F}$ auf X mit $x \in \operatorname{Lim} \mathcal{F}$.

b) Genau dann gilt $x \in \overline{A}$, wenn es einen Filter $\mathcal{F}$ auf X gibt mit $x \in \operatorname{Lim} \mathcal{F}$ und $A \in \mathcal{F}$.

12. Aufgabe: **a)** Sei X ein topologischer Raum, und sei $\mathcal{F}$ ein Ultrafilter auf X. Dann ist entweder $\mathcal{F}$ konvergent oder $\mathcal{F}$ besitzt keinen Berührpunkt.

b) Sei X ein Hausdorffraum, und sei $\mathcal{F}$ ein Filter auf X. Ist $x \in \operatorname{Lim} \mathcal{F}$, so ist x der einzige Berührpunkt von $\mathcal{F}$.

13. Aufgabe: Man zeige, dass $\mathbb{R}^N$ mit der Zariski-Topologie (vgl. Aufgabe 10.) nicht separiert ist.

14. Aufgabe: Ein topologischer Raum heißt *separabel*, wenn es eine höchstens abzählbare dichte Teilmenge gibt. Man zeige, dass jeder Teilraum eines separablen *metrischen* Raums (X, d) separabel ist.

15. Aufgabe: Die Menge $\mathbb{R}$ werde wie folgt topologisiert. Sei $x \in \mathbb{R}$ und $A \subseteq \mathbb{R}$. Dann sei A eine Umgebung von x (per definitionem), falls es ein $\varepsilon > 0$ gibt mit

$$]\, x - \varepsilon,\, x + \varepsilon\, [\cap (\mathbb{Q} \cup \{x\}) \subseteq A.$$

Man zeige:

a) Die Voraussetzungen von Satz 2.19 sind erfüllt, d. h. es gibt wirklich eine Topologie $\mathcal{T}$ mit genau diesen Umgebungen.

b) $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$ ist separiert.

c) $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$ ist separabel.

d) Der Teilraum $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ (versehen mit der Spurtopologie) ist nicht separabel. (Hinweis: Man zeige, dass die Spurtopologie auf $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ die diskrete Topologie ist.)

16. Aufgabe: Man zeige, dass die Intervalle $]\,0,\,1\,[$, $[\,0,\,1\,[$ und $[\,0,\,1\,]$ paarweise nicht homöomorph sind.