VI. ÜBUNG ZUR TOPOLOGIE

`http://math-www.upb.de/~dirk/Vorlesungen/Topologie/`

24. Aufgabe: Sei $X = \prod_{i\in I} X_i$ ein Produkt topologischer Räume X_i, mit Projektionen $p_i\colon X \to X_i$. Sei Y ein topologischer Raum und seien $f_i\colon Y \to X_i$ stetige Abbildungen $(i \in I)$.

a) Man zeige: Es gibt genau eine stetige Abbildung $f\colon Y \to X$ mit $p_i \circ f = f_i$ für jedes $i \in I$.

b) Seien zusätzlich alle f_i offene (bzw. abgeschlossene) Abbildungen $(i \in I)$. Man diskutiere, inwieweit dies die Offenheit (bzw. Abgeschlossenheit) von f zur Folge hat.

25. Aufgabe: Sei $X = \prod_{i\in I} X_i$ ein Produkt topologischer Räume X_i. Sei $J \subseteq I$ eine Teilmenge. Für jedes $i \in I \setminus J$ sei $x_i \in X_i$. Man zeige, dass der Teilraum $\prod_{j\in J} X_j \times \prod_{i\in I\setminus J}\{x_i\}$ von X homöomorph ist zum Produktraum $\prod_{j\in J} X_j$.

26. Aufgabe: Sei $X = \prod_{i\in I} X_i$ ein Produkt topologischer Räume X_i. Sei $A_i \subseteq X_i$ $(i \in I)$. Man zeige, dass die Produktopologie auf $\prod_{i\in I} A_i$ dieselbe ist wie die von X induzierte Spurtopologie auf den Teilraum $\prod_{i\in I} A_i$.

27. Aufgabe: Man zeige:

a) Jede abgeschlossene und beschränkte Teilmenge von $\mathbb{R}$ ist kompakt.

(Es darf ohne Beweis die aus der Analysis I bekannte Aussage benutzt werden, dass jede Teilfolge reeller Zahlen eine konvergente Teilfolge besitzt.)

b) (Heine-Borel) Eine Teilmenge des $\mathbb{R}^N$ (mit der üblichen Topologie) ist genau dann kompakt, wenn sie abgeschlossen und beschränkt ist.