VII. ÜBUNG ZUR TOPOLOGIE

http://math-www.upb.de/~dirk/Vorlesungen/Topologie/

28. Aufgabe: Sei $X = X' = \{1, 2, 3\}$. Sei X ausgestattet mit der gröbsten Topologie. Sei $g : X \to X'$ mit $g(1) = g(3) = 1$, $g(2) = 2$. Man bestimme auf X' die Quotiententopologie bzgl. g.

29. Aufgabe: Sei V ein Vektorraum über $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$, und sei $\mathcal{T}$ eine Topologie auf V. Es heißt V ein *topologischer Vektorraum*, wenn die Addition $V \times V \to V$ und die Skalarmultiplikation $\mathbb{K} \times V \to V$ stetige Abbildungen sind. Sei $U \subseteq V$ ein linearer Teilraum. Sei $V/U = V/\sim_U$, wobei $x \sim_U y$, falls $x - y \in U$. Sei $q\colon V \to V/U$ die Quotientenabbildung. In offensichtlicher Art und Weise definiert man auf V/U eine Vektorraumstruktur, so dass q eine lineare Abbildung ist. Man zeige:

a) Für jedes $x \in V$ ist $\alpha_x\colon V \to V$, $y \mapsto x + y$ ein Homöomorphismus.

b) $q\colon V \to V/U$ ist offen.

c) V/U ist ein topologischer Vektorraum.

30. Aufgabe: Sei X ein topologischer Raum, sei Y ein Hausdorffraum. Seien $f, g\colon X \to Y$ stetige Abbildungen. Sei $D \subseteq X$ dicht mit $f|_D = g|_D$. Man zeige: $f = g$.

31. Aufgabe: Sei (X, d) ein kompakter metrischer Raum. Man zeige, dass X vollständig ist.