

Numerische Mathematik I

Übungsblatt 13

Projekt „Adaptive Romberg-Quadratur“

Aufgabe 13.1 (8 Punkte) In der Vorlesung wurde das adaptive Romberg-Verfahren zur Berechnung einer Näherung $\hat{I}(f)$ des Integrals

$$I(f) = \int_a^b f(x) dx$$

mit $|I(f) - \hat{I}(f)| \leq |I(f)| \cdot tol$ mit einer vorgegebenen relativen Genauigkeit tol vorgestellt. Stellen Sie das Verfahren detailliert als Pseudo-Code-Algorithmus dar, indem Sie insbesondere

- die erforderlichen Eingaben,
- alle Variablen,
- die Abfolge der Einzelschritte in Schleifen oder Unter-Algorithmus und
- die Ausgabe des Algorithmus

angeben. Ihr Algorithmus soll zur Fehlerschätzung das *subdiagonale Fehlerkriterium* aus der Vorlesung verwenden. Verwenden Sie für die Schrittweitensteuerung zunächst die in der Vorlesung vorgestellte Minimierung des Verhältnisses von Aufwand zu Schrittweite, wobei Sie eine geeignete, selbst (begründet!) gewählte Schätzung für I_{skal} benutzen.

Aufgabe 13.2 (8 Punkte) Implementieren Sie den in Aufgabe 13.1 formulierten Algorithmus. Das Programm soll jeweils neben dem Wert des Integrals sowie der Summe der Fehlerschätzer auch die Folge der verwendeten Schrittweiten H und Intervalle $[t, t + H]$ ausgeben. Testen Sie es an den Beispielen

(a) $\int_0^1 x^{\frac{5}{2}} dx = \frac{2}{7} \approx 0,28571428571,$

(b) $\int_1^2 x^{\frac{5}{2}} dx = \frac{2}{7}(8 \cdot \sqrt{2} - 1) \approx 2,94677385685,$

(c) $\int_0^2 \frac{1}{(x-1)^2 + 0,001} dx.$

Aufgabe 13.3 (Wettbewerb!) *Herr Dellnitz setzt als Gewinn für den folgenden Wettbewerb eine Flasche Sekt aus.*

Entwickeln Sie eine Strategie für die Steuerung der adaptiven Schrittweite H und der Ordnung des auf den Teilintervallen verwendeten Romberg-Verfahrens, die bei möglichst wenig Funktionsaufrufen ein möglichst genaues Ergebnis liefert.

Erweitern Sie dazu Ihr Programm aus Aufgabe 13.2 um einen Zähler für die Anzahl der Funktionsaufrufe und lassen Sie die Gesamtzahl am Ende des Programms ausgeben.

Zur Teilnahme am Wettbewerb sind abzugeben: Ein mit einem ANSI-C-Compiler (bei der Auswahl des Siegers wird `gcc` verwendet werden) kompilierbarer Programm-Quelltext, die Ergebnisse für die Test-Beispiele aus Aufgabe 13.2 und eine nachvollziehbare Erläuterung der gewählten Schrittweiten-/Ordnungsstrategie.

Aus den abgegebenen Programmen wird in einer öffentlichen Veranstaltung am 23. 2. 2005 das Sieger-Programm ausgewählt. Details dazu sind zu gegebener Zeit auf der Webseite zur Vorlesung zu finden.

Es gewinnt dasjenige Programm, das bei zwei Testbeispielen zu einer vorgegebenen Integrationsgenauigkeit die geringste Anzahl von Funktionsauswertungen benötigt. Sind mehrere abgegebene Lösungen gleich gut, so entscheidet das Los.

Abgabetermin für dieses Blatt: Dienstag, 22. 2. 2005, 9.15 Uhr, oranger Kasten 12 im Flur D1. Bitte vergessen Sie nicht, auf dem Blatt Ihren Namen und Ihre Matrikel-Nummer anzugeben.