MUSTERLÖSUNG ZU MINIPROJEKT 14

Olaf Müller

5. Februar 2002

Gegeben ist die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 21 & 42 & 0 & \frac{20}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 15 & 30 & 0 & \frac{14}{3} & 0 & 0 \\ 22 & 44 & 1 & \frac{20}{3} & 2 & 0 \\ 63 & 126 & 0 & 20 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Die Aufgabe: Bestimmung von Rang, Zeilen- und Spaltenabhängigkeiten.

Aber wir wissen: die Kernvektoren von A bilden eine Basis der Spaltenabhängigkeiten, die Zeilen der Kontrollmatrix eine Basis der Zeilenabhängigkeiten.

Ich rechne jetzt den 08/15-Weg. Herausforderung an Euch: es mindestens so schnell/einfach/richtig zu machen. Es gibt etwas bessere Wege. Probiert einfach mal ein bisschen 'rum, ist eine sehr gute Übung. **Achtung:** Es bringt nicht viel, sich reine *Schreibarbeit* zu sparen. Dies kann auch leicht zu Fehlern führen. Euer Ziel sollte es sein, Euch *Rechenarbeit* zu sparen. Aber grübelt nicht zu lange darüber, wie Ihr weiterrechnet, denn es gibt auch immer die 08/15 (auch genannt „kanonische") Lösung. Die verwirrt auch keinen Korrektor.

$$\left(\begin{array}{cccccc|ccccc} 21 & 42 & 0 & \frac{20}{3} & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 15 & 30 & 0 & \frac{14}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 22 & 44 & 1 & \frac{20}{3} & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 63 & 126 & 0 & 20 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} \cdot\frac{1}{21} \\ \\ \\ \\ \\ \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cccccc|ccccc} 1 & 2 & 0 & \frac{20}{63} & 0 & 0 & \frac{1}{21} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 15 & 30 & 0 & \frac{14}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 22 & 44 & 1 & \frac{20}{3} & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 63 & 126 & 0 & 20 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} \\ \\ -15\cdot\mathrm{I} \\ -22\cdot\mathrm{I} \\ -63\cdot\mathrm{I} \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cccccc|ccccc} 1 & 2 & 0 & \frac{20}{63} & 0 & 0 & \frac{1}{21} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{2}{21} & 0 & 0 & -\frac{5}{7} & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{20}{63} & 2 & 0 & -\frac{22}{21} & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} \\ \to \mathrm{IV} \\ \cdot(-\frac{21}{2}) \\ \to \mathrm{II} \\ \\ \end{array}$$

$$
\begin{array}{l}
\left(\begin{array}{cccccc|ccccc}
1 & 2 & 0 & \frac{20}{63} & 0 & 0 & \frac{1}{21} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & -\frac{20}{63} & 2 & 0 & -\frac{22}{21} & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{15}{2} & 0 & -\frac{21}{2} & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -3 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{array}\right)
\begin{array}{l}
\\ \\ \\ \\ -\mathrm{IV}
\end{array}
\\
\left(\begin{array}{cccccc|ccccc}
1 & 2 & 0 & \frac{20}{63} & 0 & 0 & \frac{1}{21} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & -\frac{20}{63} & 2 & 0 & -\frac{22}{21} & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{15}{2} & 0 & -\frac{21}{2} & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \multicolumn{5}{|c|}{\boxed{-3 \quad -1 \quad 0 \quad 0 \quad 1}}
\end{array}\right)
\begin{array}{l}
-\frac{20}{63}\cdot \mathrm{III} \\ +\frac{20}{63}\cdot \mathrm{III} \\ \\ \\ \\
\end{array}
\end{array}
$$

Jetzt können wir leicht den Rang 4 und die Kontrollmatrix ablesen. Ihre Zeilen (hier nur eine) bilden eine Basis der Zeilenabhängigkeiten. Wir überprüfen, dass die eine Zeile wirklich eine Abhängigkeit der Zeilen von A liefert. Das solltet Ihr natürlich immer tun — *besonders in der Klausur!*

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
 & (-3) & \cdot & (21 & 42 & 0 & \frac{20}{3} & 0 & 0) \\
+ & (-1) & \cdot & (0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1) \\
+ & 1 & \cdot & (63 & 126 & 0 & 20 & 0 & 1) \\
= & & & (0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0)
\end{array}
$$

Nun brauchen wir nur noch mit der linken Seite weiterzurechnen und für Nullen über den „Treppenstufeneinsen” zu sorgen. Die beiden Operationen dafür stehen schon oben hinter der Matrix. Beachtet bitte, dass hier nicht wirklich zu rechnen ist.

$$
\begin{pmatrix}
1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{pmatrix}
$$

Der Entzerrungsalgorithmus liefert zwei Kernvektoren, die eine Basis der Spaltenabhängigkeiten sind:

$$
\left(\begin{array}{c|c|cc|c|c}
\hline
1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
\hline
\end{array}\right)
$$

Dass beide Vektoren Spaltenabhängigkeiten darstellen, rechnet Ihr jetzt bitte selber nach.

Olaf Müller